

LA TRIPLE CUPULA de la catedral londinense de San Pablo vista en sección transversal por el crucero. El cono de fábrica de ladrillo constituye el soporte intermedio y sostiene la cáscara exterior y la pesada linterna. Debido a la forma cónica, tal linterna contribuye a aumentar la estabilidad. Las cargas derivadas de la linterna en la estructura cónica no se proyectan hacia el exterior, como sucede en San Pedro de Roma, y actúan fundamentalmente a compresión. La línea roja superpuesta tiene forma de catenaria invertida (forma que adopta una cadena suspendida por sus extremos). Robert Hooke, colaborador de Christopher Wren después del incendio de Londres y miembro de la Royal Society, había señalado que una catenaria invertida trabaja solamente a compresión en tanto que la catenaria en su posición normal trabaja solo a extensión. Desde el siglo XIX algunos investigadores han intentado demostrar que su arquitecto se valió de los estudios de Hooke sobre la catenaria, pero no hay pruebas de cosa semejante.

METODOS GRAFICOS DE CALCULO

GUION: FRANCISCO JURADO

MADRID, FEBRERO 1982

COLABORAN: FRANCISCO CORTES

FELIPE FERNANDEZ

JAVIER GALANTE

FERMIN VADILLO

INDICE

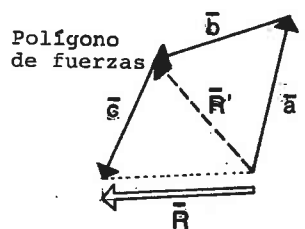
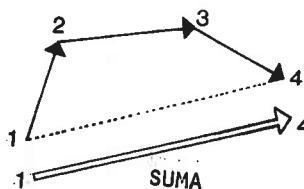
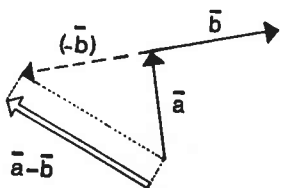
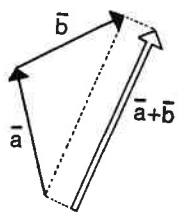
	pg.
I. POLIGONOS VECTORIALES	1
Preliminares	1
Resultante de un sistema de fuerzas	1
Resultante de fuerzas paralelas	2
II. POLIGONO FUNICULAR	3
Polígono funicular	3
Sistema de fuerzas equivalente a un par	4
Sistema de fuerzas nulo	4
Momento de un sistema de fuerzas respecto a un punto dado	5
Momento de parte de un sistema nulo respecto a un punto dado	5
Obtención de la elástica	7
III. SECCION	8
Obtención del centro de gravedad	8
Momento de inercia respecto a un eje	9
Producto de inercia respecto a dos ejes	10
IV. ESTABILIDAD	11
Núcleo central de inercia	11
Estabilidad	11
Empuje de tierras	12
V. CARGAS MOVILES	13
Viga apoyada con carga móvil	13
Método de Winkler	14
VI. VIGAS TRIANGULADAS	15
Deformaciones en vigas trianguladas. Método de Williot-Mohr	15
Lámina cilíndrica triangulada	19
Cúpulas trianguladas	19

VII. ARCOS

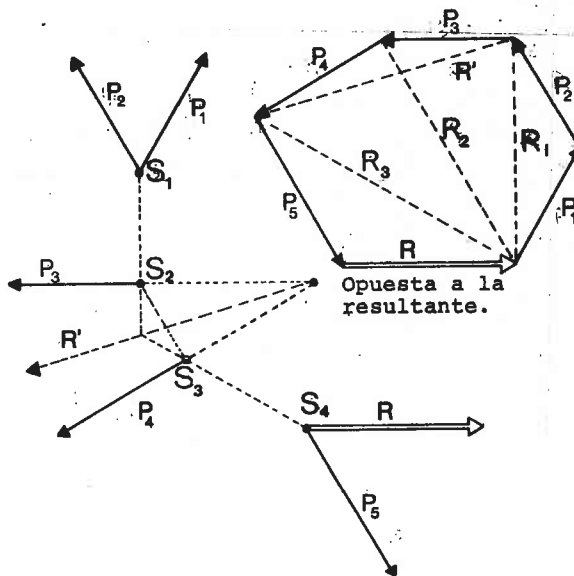
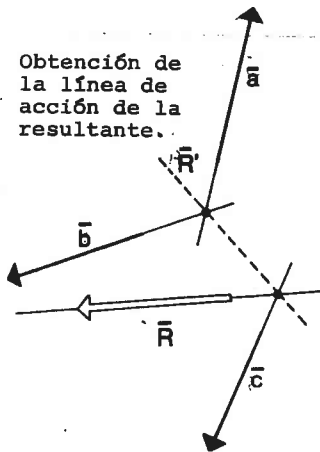
	pg.
Arcos. Introducción	20
Arco triarticulado	20
Polígono de presiones	21
Arco triarticulado con carga vertical	22
Arcos y bóvedas	23
Ejemplo: Arco de ladrillo	24
Cambios en el polígono de presiones de un arco al añadir nuevas cargas	24
Ejemplos de polígonos de presiones en arcos hiperestáticos	25

BIBLIOGRAFIA

- 'Teoría de barras', Jose L. de Miguel 1979 Seminario de Diseño de Estructuras.
- 'Estática Gráfica', Otto Henkel, 1953 Editorial Labor S.A.
- 'Barras y Arcos', Arangoa, 1973 Departamento Publicaciones E.T.S.A.M.
- 'Física teórica para ingenieros', Castaños y otros, 1971.
- 'Cálculo de Estructuras Reticulares', Fdez. Casado, 1967. Editorial Dossat.
- 'Statique Graphique Elementaire el Notions Preliminaires de Resistance des Matériaux' M. Darras, 1925 París.
- 'La parábola: curva abstracta que se adapta bien al mundo concreto', Martín Gardner, octubre 1981, Revista Investigación y Ciencia
- 'La arquitectura de Christopher Wren', Harold Dorn y Robert Mark, septiembre 1981, Revista Investigación y Ciencia.
- y cualquier otro libro o revista que el lector encuentre de su agrado.



Obtención de la línea de acción de la resultante.



PRELIMINARES

Recordando el proceso seguido para efectuar una suma vectorial operaremos del mismo modo con fuerzas de dirección y magnitud conocida. Cuando las fuerzas a sumar son varias, es útil el recordar la analogía vectorial de la traslación: dadas varias fuerzas (o vectores traslación) 1-2, 2-3, 3-4, la suma de todas ellas (la traslación resultante) vendrá definida por la que tiene como origen el de la primera (1) y como extremo el de la última (4). El polígono así definido (POLIGONO DE FUERZAS) puede estar en equilibrio de fuerzas y entonces será CERRADO (traslación nula).

RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS

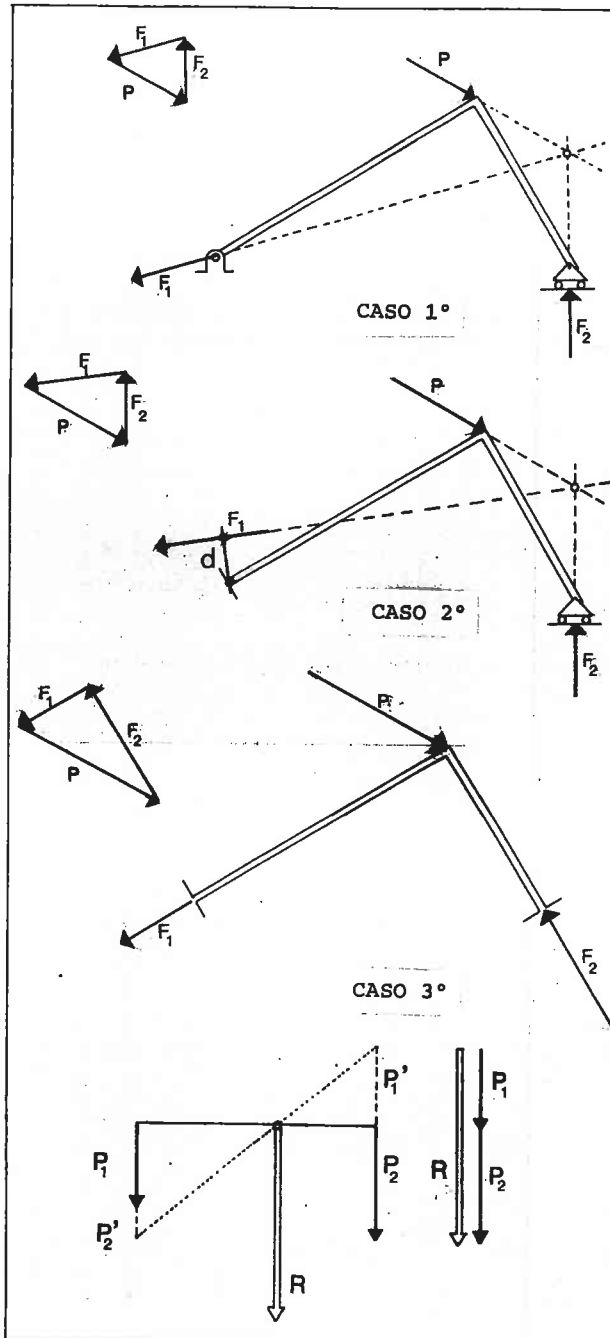
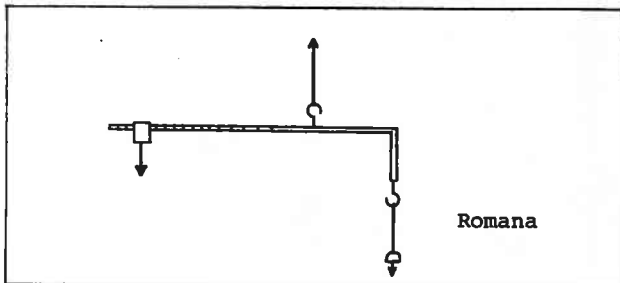
Además del polígono de fuerzas, donde las mismas sólo quedan representadas en magnitud, dirección y sentido, dibujando las líneas de acción de las fuerzas, podemos obtener la línea de acción de la resultante.

Como la resultante de dos fuerzas ha de pasar necesariamente por la intersección de las líneas de acción de ambas (condición necesaria para que exista equilibrio de momentos), el procedimiento es sencillo operando de dos en dos fuerzas: sea el sistema de fuerzas constituido por P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 ; con ellas se construye primero un polígono de fuerzas en el que se trazan las resultantes parciales R_1, R_2, R_3 y la total R , que así queda determinada en magnitud, dirección y sentido; por el punto S_1 de intersección de P_1 y P_2 , que pertenece a la resultante R_1 , se traza la paralela a ésta, dada en el polígono vectorial, que cortará a P_3 en un punto S_2 , por el cual

se traza la paralela a R_2 hasta que corte a P_4 , etc. así hasta que el corte con la última fuerza P_5 ; nos da un punto de la resultante total, que queda determinada completamente. Como también puede verse en la figura, es fácil la determinación de una resultante intermedia R' .

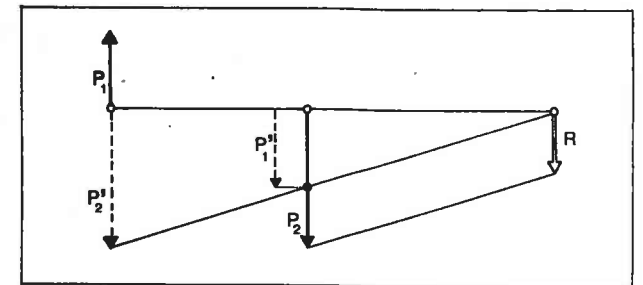
La línea poligonal S_1, S_2, S_3, S_4 , puede ser considerada como eje de un hilo en equilibrio sometido a la acción de las fuerzas P aplicadas en los puntos S . Por esta razón se designa a dicha línea poligonal con el nombre de **POLIGONO FUNICULAR**.

Como aplicación inmediata de que la resultante de dos fuerzas pasa por el punto de intersección de ambas, tenemos la estructura dibujada al margen. En el caso 1° la estructura queda completamente resuelta gráficamente debido a su carácter isostático (nos basta la consideración de equilibrio de momentos y de fuerzas para resolverla); en el segundo caso, al sustituir la articulación izquierda por un empotramiento, añadimos una incógnita hiperegática (desconocemos la distancia d) y necesitaríamos acudir a la compatibilidad de deformaciones, por ejemplo, para resolverla; el caso 3° se convierte también en isostático si consideramos despreciables los acortamientos y alargamientos de las barras, y, por tanto, resoluble directamente mediante método gráfico.



RESULTANTE DE FUERZAS PARALELAS

Un método sencillo para obtener la posición de la resultante de dos fuerzas paralelas consiste en dividir el segmento que las une en razón inversa a la magnitud de las fuerzas; por el punto de división pasará la resultante. En la figura, dadas P_1 y P_2 , se permutan los puntos de aplicación y se cambia el sentido de una de ellas (P'_1 en este caso), al unir los extremos de las fuerzas P'_1 y P'_2 queda dividido el segmento como antes indicábamos y determinada la posición de R . Si en vez de considerar la resultante consideramos la opuesta a ella, tendremos un sistema en equilibrio, en el que se basa la *norma*. (instrumento para pesar), en la que se varía la longitud del segmento hasta conseguir el equilibrio de momentos. Si las fuerzas P_1 y P_2 tienen sentidos contrarios, el método sigue siendo el mismo: permutar los puntos de aplicación y cambiar el sentido de una de ellas; la resultante en este caso estará fuera del segmento comprendido entre las dos.



POLIGONO FUNICULAR

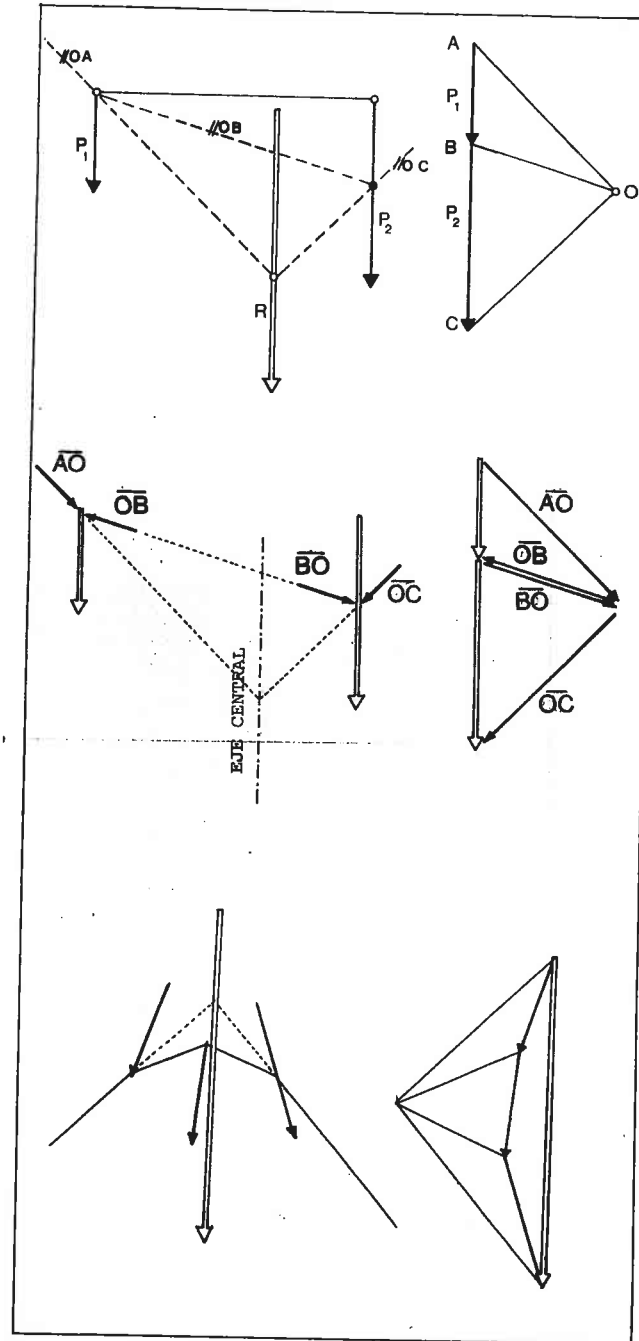
Con los métodos expresados hasta ahora podemos determinar perfectamente la resultante de cualquier sistema de fuerzas. Pero en la realidad ocurre a menudo que dos fuerzas son casi paralelas y su intersección está fuera de los límites del dibujo. Es útil en este caso la descomposición auxiliar que proporciona el considerar un vértice más (*polo*) en el polígono de fuerzas.

En la figura al margen aparecen dos fuerzas P_1 y P_2 , añadiendo al polígono el vértice O , que llamaremos *polo*, hemos añadido al sistema las fuerzas \vec{OA} y \vec{OC} equivalentes al sistema anterior; por tanto, la resultante del sistema pasará por la intersección de dichas fuerzas equivalentes. Esto proporciona un sencillo método para obtener la línea de acción de la resultante, como se observa en la figura, trazando paralelas a \vec{OA} , \vec{OB} y \vec{OC} (*radios polares*).

En el fondo, lo que estamos haciendo al tomar un polo cualquiera y los correspondientes radios polares, es utilizar una descomposición auxiliar de las fuerzas P en otras equivalentes definidas por los radios polares, de modo que cada fuerza P puede ser sustituida por los dos radios polares que unen el polo con sus extremos.

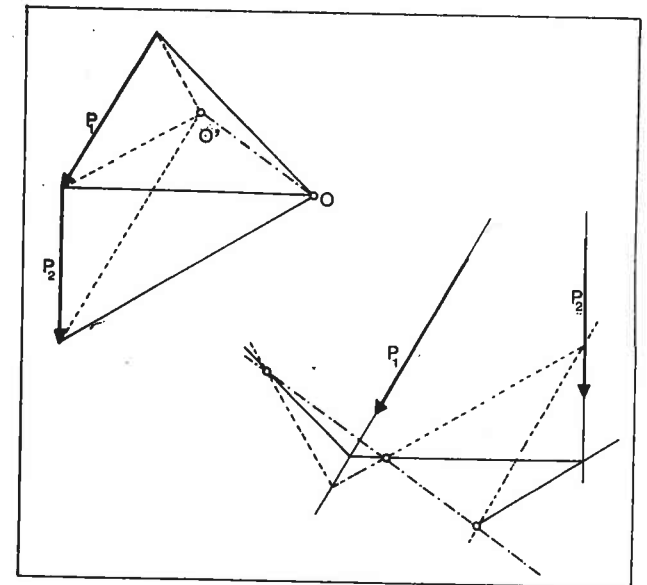
Eligiendo el polo a la izquierda del polígono de fuerzas obtenemos un polígono funicular (*antifunicular*) asimilable esta vez a un arco comprimido por las fuerzas del sistema.

El orden de sucesión en que se consideren las fuerzas al construir el polígono funicular (o el polígono de fuerzas) es arbitrario, como fácilmente puede comprobar por sí mismo el lector. Cualquiera que sea dicho orden, se obtiene siempre la misma resultante en magnitud, di-



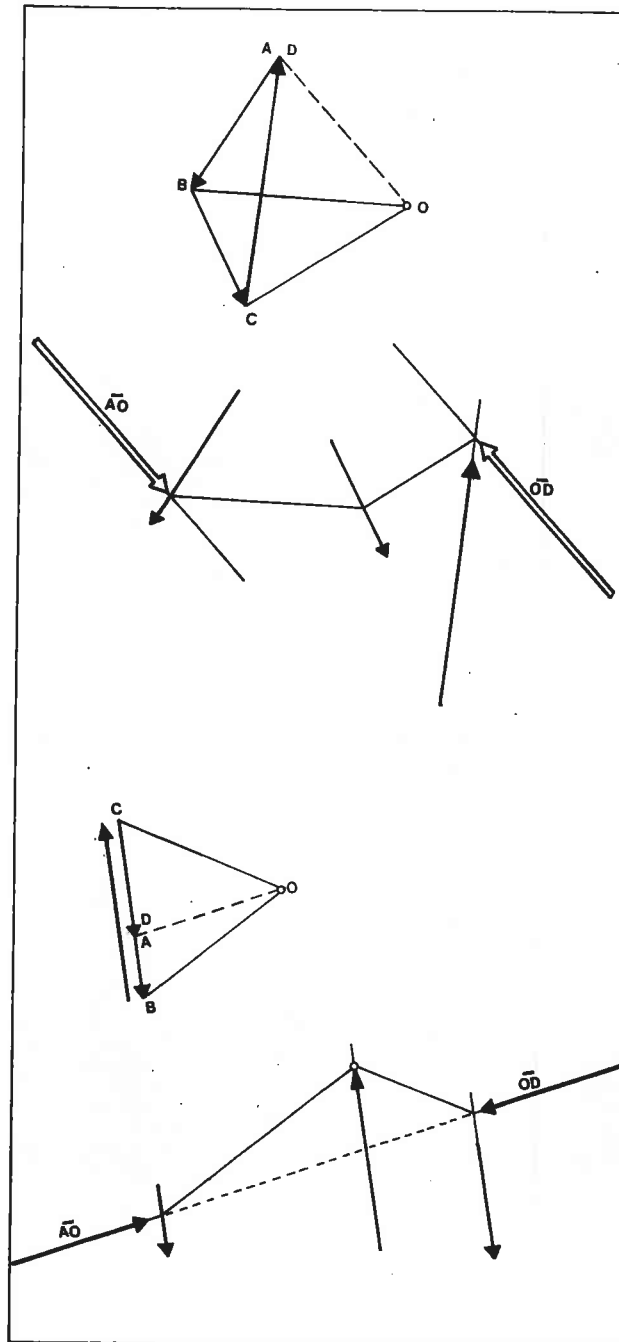
rección, sentido y posición en el plano, como es obvio.

Del mismo modo, se puede variar arbitrariamente la posición del polo sin que tal variación modifique en nada la resultante del sistema. En la figura se han construido dos polígonos funiculares para el sistema de fuerzas P_1 y P_2 tomando dos polos arbitrarios O y O' ; observamos que los lados homólogos de ambos polígonos se cortan en una recta (*eje polar*) que es paralela a la que une los dos polos, $\vec{OO'}$. Esta propiedad (útil a la hora de construir polígonos funiculares que pasen por puntos dados) se entiende perfectamente al considerar el segmento $\vec{OO'}$ como una fuerza, que será siempre la resultante de dos radios polares homólogos cualesquiera de cada uno de los polos; por tanto, dicha resultante ha de pasar por la intersección de las fuerzas correspondientes a dichos radios polares, por tanto, el eje polar de ambos polígonos funiculares.



SISTEMA DE FUERZAS EQUIVALENTE A UN PAR

Si el polígono de fuerzas de un sistema es cerrado, significa que está en equilibrio de fuerzas, pero no necesariamente en equilibrio de momentos. Sea el sistema constituido por las fuerzas \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CD} , su polígono de fuerzas es cerrado; tomemos un polo cualquiera O y tracemos el polígono funicular; el sistema de fuerzas dado es equivalente a las fuerzas \overline{AO} y \overline{OD} , fuerzas iguales, opuestas y paralelas, es decir, no coinciden sus líneas de acción (no coinciden la primera y la última línea del polígono funicular); no hay por tanto equilibrio de momentos y el sistema es equivalente a un par de fuerzas.



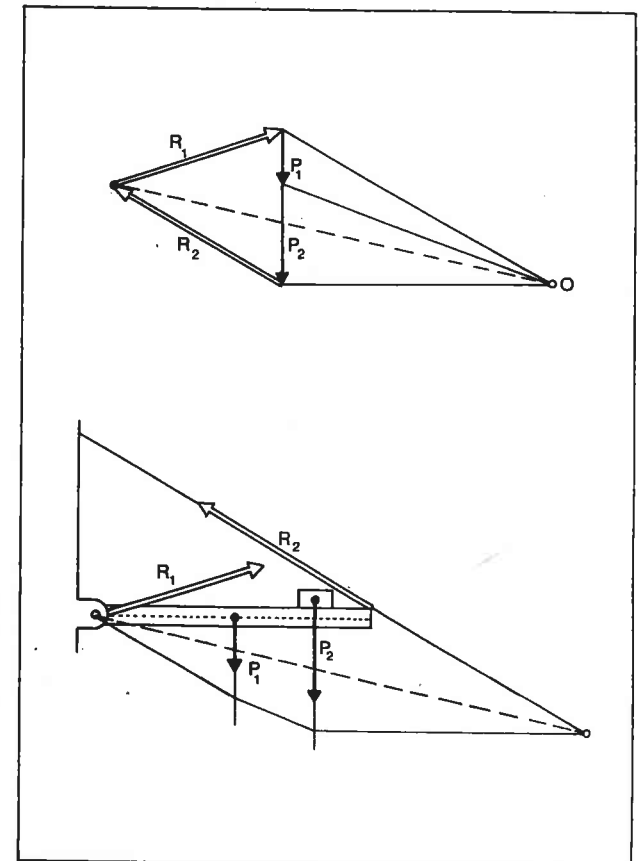
SISTEMA DE FUERZAS NULO (EN TOTAL EQUILIBRIO)

Para que también haya equilibrio de momentos, no sólo ha de ser cerrado el polígono de fuerzas, sino que también ha de "cerrarse" el polígono funicular, es decir, han de coincidir la primera y la última líneas del mismo.

Al margen se ha dibujado un sistema de fuerzas nulo, equivalente a las fuerzas \overline{AO} y \overline{OD} , iguales, opuestas y coincidentes.

A la línea de acción de estas fuerzas equivalentes del sistema se le llama *línea de cierre*, y en el trazado de la misma se basan los métodos que utilizan el polígono funicular para obtener las reacciones que equilibran totalmente a un sistema.

Veamos la estructura dibujada al margen constituida por una barra articulada en un extremo y sujeta mediante un cable en el otro, con un peso encima; son datos del problema las fuerzas P_1 (peso propio de la barra) y P_2 (acción de la carga); dibujando el polígono de fuerzas y eligiendo un polo O cualquiera, trazamos el polígono funicular de modo que pase por la articulación izquierda, el punto de corte del polígono con la línea de acción del cable nos acaba de determinar la línea de cierre, y llevando la paralela al polígono obtenemos R_1 y R_2 .

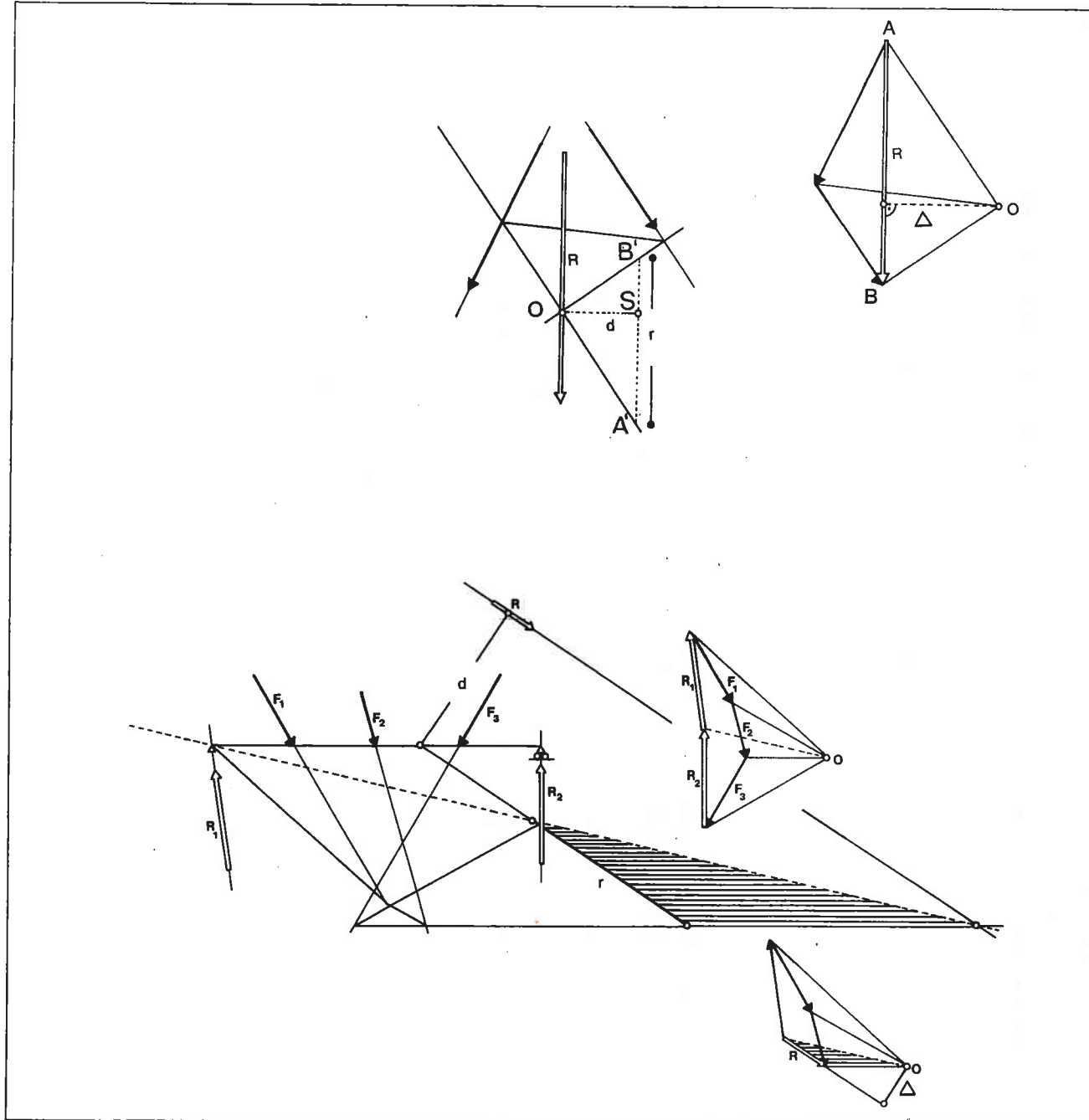


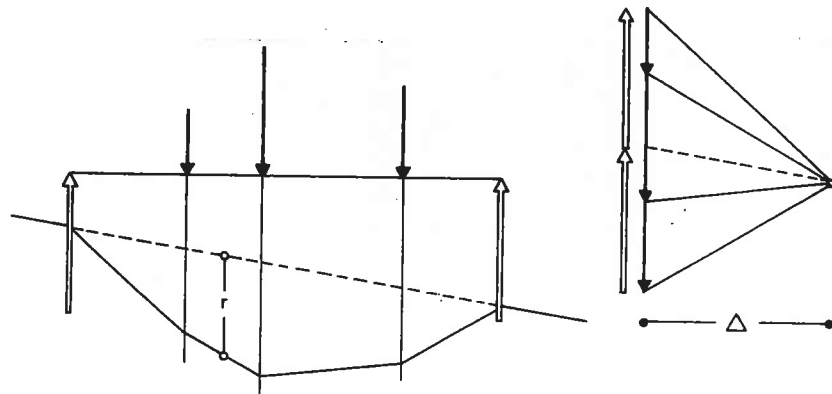
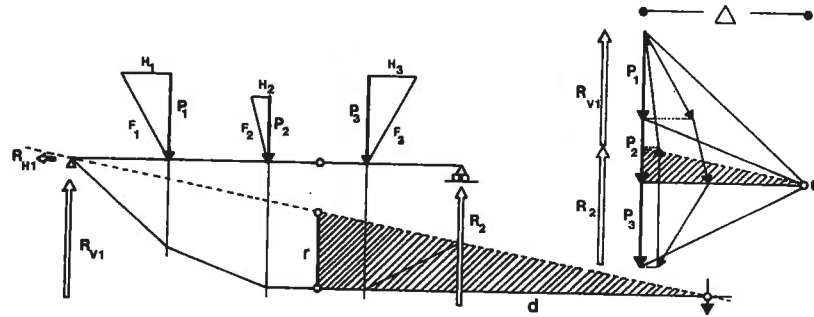
MOMENTO DE UN SISTEMA DE FUERZAS RESPECTO A UN PUNTO DADO.

Dado un sistema de fuerzas P y un punto S , hallaremos en primer lugar el *eje central* del sistema (línea de acción de la resultante) mediante un polígono funicular construido al tomar como polo el punto O . El momento del sistema respecto a S será el de la resultante \bar{R} respecto a dicho punto, será, por tanto, $M = \bar{R} \cdot d$. Trazando por S una paralela al eje central nos aparece el triángulo $O'A'B'$ semejante al OAB , y podemos expresar $\bar{R}/\bar{\Delta} = r/d$ (el guiñon arriba indica escala de fuerzas en el polígono de fuerzas, y donde no aparece el guiñon está en escala de longitudes, la del polígono funicular), con lo que el momento también puede expresarse mediante el producto $M = r \cdot \bar{\Delta}$.

MOMENTO DE PARTE DE UN SISTEMA NULO RESPECTO A UN PUNTO DADO.

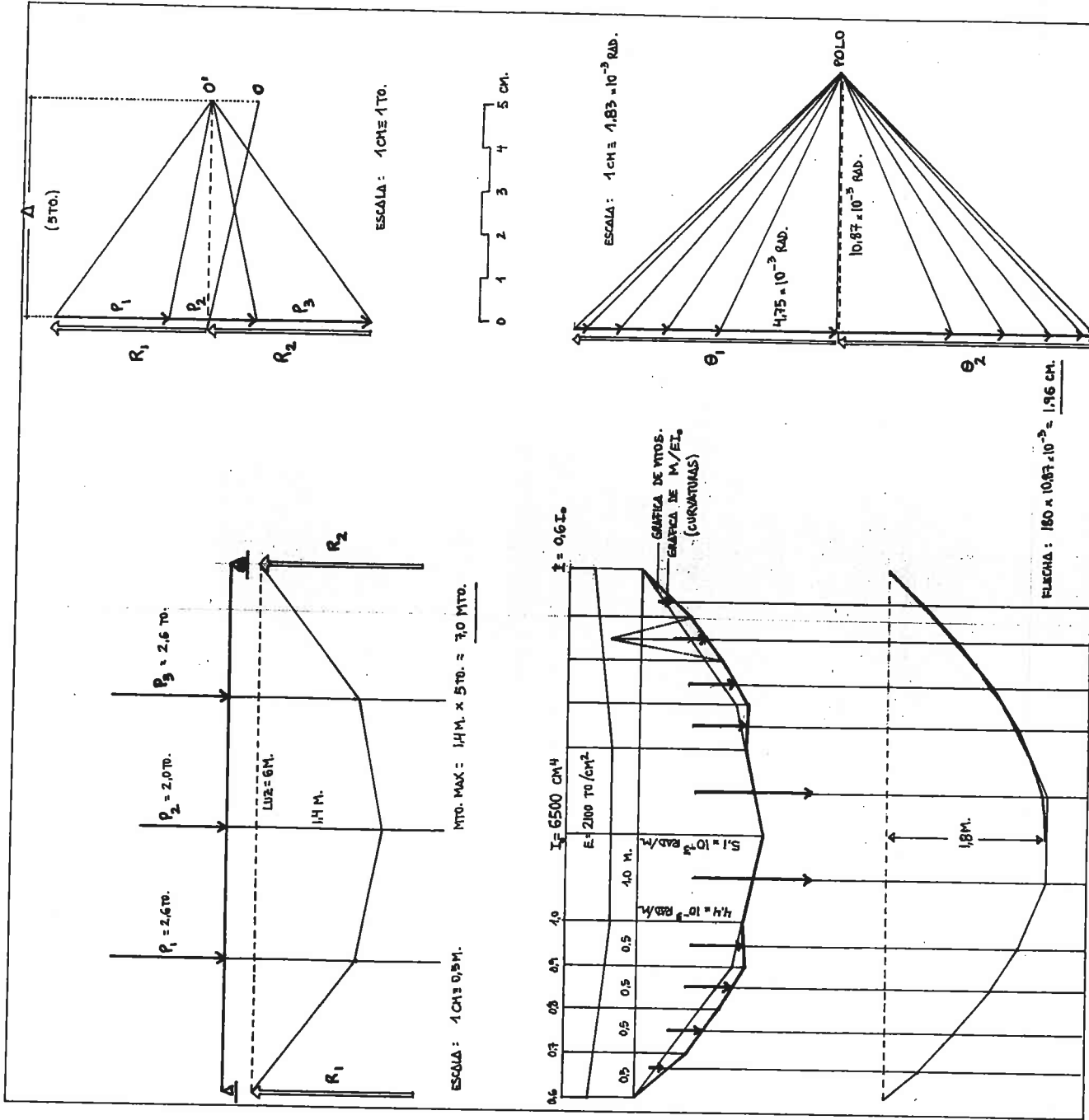
Supongamos que tenemos el sistema nulo de la figura constituido por una viga solicitada por las fuerzas F en equilibrio total con las reacciones R (éstas pueden obtenerse gráficamente mediante un polígono funicular haciendo que la línea de cierre pase por la articulación izquierda). Si queremos obtener el momento existente en el punto S "interior" al sistema, momento debido a las acciones de uno u otro lado de la izquierda o de la derecha (eso es el momento flector existente en el punto S de la viga), podemos obtener la resultante existente \bar{R} existente en ese punto (en la figura se ha separado el trozo de polígono de fuerzas que define \bar{R} para su mejor observación) y el momento flector en S vendrá dado por $M = \bar{R} \cdot d$, o bien, según la semejanza definida anteriormente, $M = r \cdot \bar{\Delta}$.





Momento flector = $r \cdot \bar{A}$

Realmente, como las componentes de fuerzas en la misma dirección de la viga no producen momento flector, es mucho más cómodo trabajar separadamente con componentes horizontales y verticales (las transversales a la viga en este caso, que son las que producen momentos flectores). Para el mismo caso anterior, se han descompuesto esta vez todas las fuerzas en sus dos componentes, longitudinal y transversal; tanto el polígono funicular como el de fuerzas (sobre el que están dibujadas también las fuerzas sin descomponer, cosa que no sería necesaria) quedan notablemente simplificados, y el momento en un punto S intermedio queda fácilmente determinado mediante el producto $r \cdot \bar{A}$. Ahora, \bar{A} , que llamaremos *distancia polar*, es constante para cualquier punto intermedio que consideremos, y r es siempre el segmento comprendido entre la línea de cierre y el polígono funicular, en la vertical del punto que estamos considerando (nótese que al salirnos de la viga el segmento interceptado es nulo, ya que el sistema está en equilibrio). Vemos que el conjunto línea de cierre-polígono funicular es el diagrama de momentos flectores, en escala de longitudes (la de la viga), que, al multiplicarlo por la distancia polar, en escala de fuerzas (la del polígono de fuerzas), nos dará el diagrama en sus unidades correctas. La aleatoriedad de elección del polo O no influye en el resultado, salvo en la fisonomía de las figuras, puesto que para una distancia polar pequeña obtendremos un diagrama muy "abultado", y para una distancia polar grande, el diagrama aparecerá más "delgado". Por esto es también llamada la distancia polar \bar{A} el *factor de escala*.



OBTENCION DE LA ELASTICA

Basándonos en la analogía que existe entre cargas-cortantes-momentos y curvaturas-giros-flechas, podemos usar las propiedades del polígono funicular para la obtención de la elástica de una viga para un determinado diagrama de momentos flectores conocido.

Dividiendo la gráfica de momentos flectores por $E \cdot I$ (E es el módulo de elasticidad del material de la viga; I es la inercia que tenga en cada punto), pasamos a gráfica de curvaturas; utilizando ahora dicha gráfica como si fuera un sistema de cargas sobre la viga del que queremos obtener su diagrama de momentos, obtendremos la flecha en cada punto ('momento flector' de las curvaturas) mediante un polígono funicular; la distancia polar vendrá en unidades de giro en este caso.

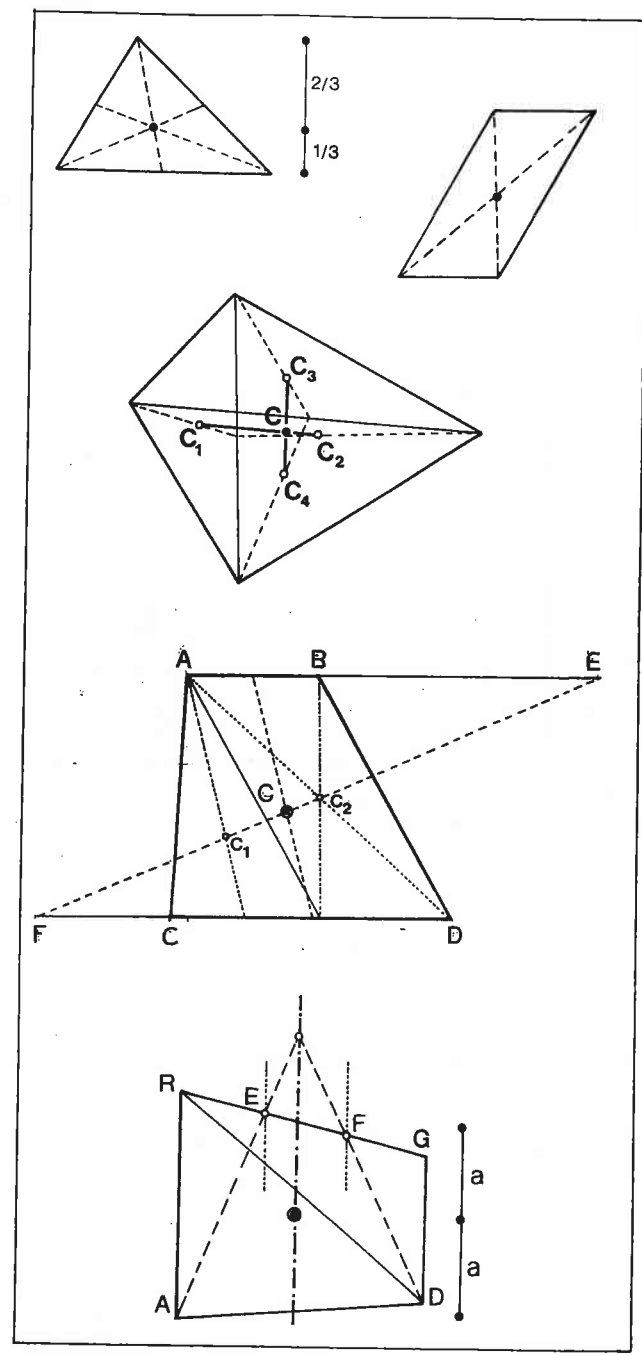
En el ejemplo de la figura se ha determinado la flecha en el centro de una viga biapoyada; también en este caso se puede obtener θ_1 y θ_2 que son los giros en los apoyos.

OBTENCION DEL CENTRO DE GRAVEDAD

En el caso elemental del triángulo, es obvio que toda mediana contiene el centro de gravedad (puesto que la mediana de un lado es el lugar geométrico de los puntos medios de cada "rebanada" paralela a ese lado), por tanto, el punto de intersección de dos medianas cualesquiera nos dará la posición del c.d.g. (baricentro, en este caso).

Un cuadrilátero bastaría dividirlo por una de sus diagonales en dos triángulos; de ellos obtenemos sus respectivos c.d.g. C_1 y C_2 ; la recta $\overline{C_1C_2}$ es eje de gravedad del cuadrilátero; repitiendo la operación con otra diagonal obtendremos otro eje de gravedad $\overline{C_3C_4}$; en la intersección de ambos se hallará el centro de g. buscado. Esta construcción demuestra directamente que el c.d.g. de un paralelogramo es el punto de intersección de sus diagonales.

En el caso particular de un trapecio, la recta que une los puntos medios de sus bases es un eje de gravedad. Si trazamos la paralela a uno de sus lados de modo que lo dividamos en un paralelogramo y un triángulo, la intersección de la recta que une los c.d.g. de ambos, $\overline{C_1C_2}$, con la que une los puntos medios de las bases nos dará el c. buscado. Es fácilmente demostrable, por semejanza de triángulos, que la prolongación de la recta $\overline{C_1C_2}$ corta a la de las bases en dos puntos E y F tales que $\overline{BE} = \overline{CD}$ y $\overline{CF} = \overline{AB}$, lo cual nos da otra sencilla construcción: se lleva la base grande a continuación de la menor, y la pequeña, en sentido contrario, a continuación de la mayor, uniendo y cortando a la recta que une los puntos medios de las bases obtendremos el c.d.g.



Otra construcción sencilla en el caso del trapecio (útil cuando manejamos "trozos" de diagramas de momentos, cargas, etc.) es dividir uno de los lados (distinguiendo de las bases) del trapecio en tres partes iguales, obteniéndose los tres segmentos iguales \overline{BE} , \overline{EF} y \overline{FC} ; uniendo e con A y F con D obtenemos el punto G intersección, la paralela a las bases por G es un eje de gravedad, y el punto medio de la porción interior al trapecio es el c.d.g. La demostración (que se sale de los límites de este texto), por semejanza de triángulos, se basa en que el eje de gravedad obtenido es la línea de acción de la resultante de los c.d.g. de los triángulos 1 y 2.

En el caso general de la obtención del c.d.g. de un cuerpo cualquiera, bastaría "colgarlo" dos veces en dos direcciones distintas, obteniéndose así dos ejes de gravedad, y en su intersección se hallaría el punto buscado.

Como la mayoría de las veces esto no es posible (nótese, por ejemplo, la dificultad de suspender dos veces de un gancho un muro de contención de varias toneladas), es mucho más operativo el dividir el cuerpo en un sistema de masas (que equivalen a fuerzas verticales mediante la acción de la gravedad) y obtener la posición de la resultante en dos direcciones. Vemos en la figura un sistema de masas que nos da los pesos P_1, P_2, P_3 y P_4 en las posiciones dibujadas; mediante la construcción de un polígono funicular obtenemos el eje de gravedad e en una dirección; con el mismo polo O y considerando ahora los pesos girados 90° , lo que equivale a "pesar" el cuerpo en una dirección ortogonal a la anterior, construimos otro polígono funicular que nos proporciona otro eje de gravedad e' ; en la intersección de ambos se encuentra el c.d.g. del sistema.

Como aplicación elemental de este procedimiento, se ha obtenido el c.d.g. de un área plana sencilla, previa subdivisión de la misma en figuras geométricas de c.d.g. conocido.

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN EJE

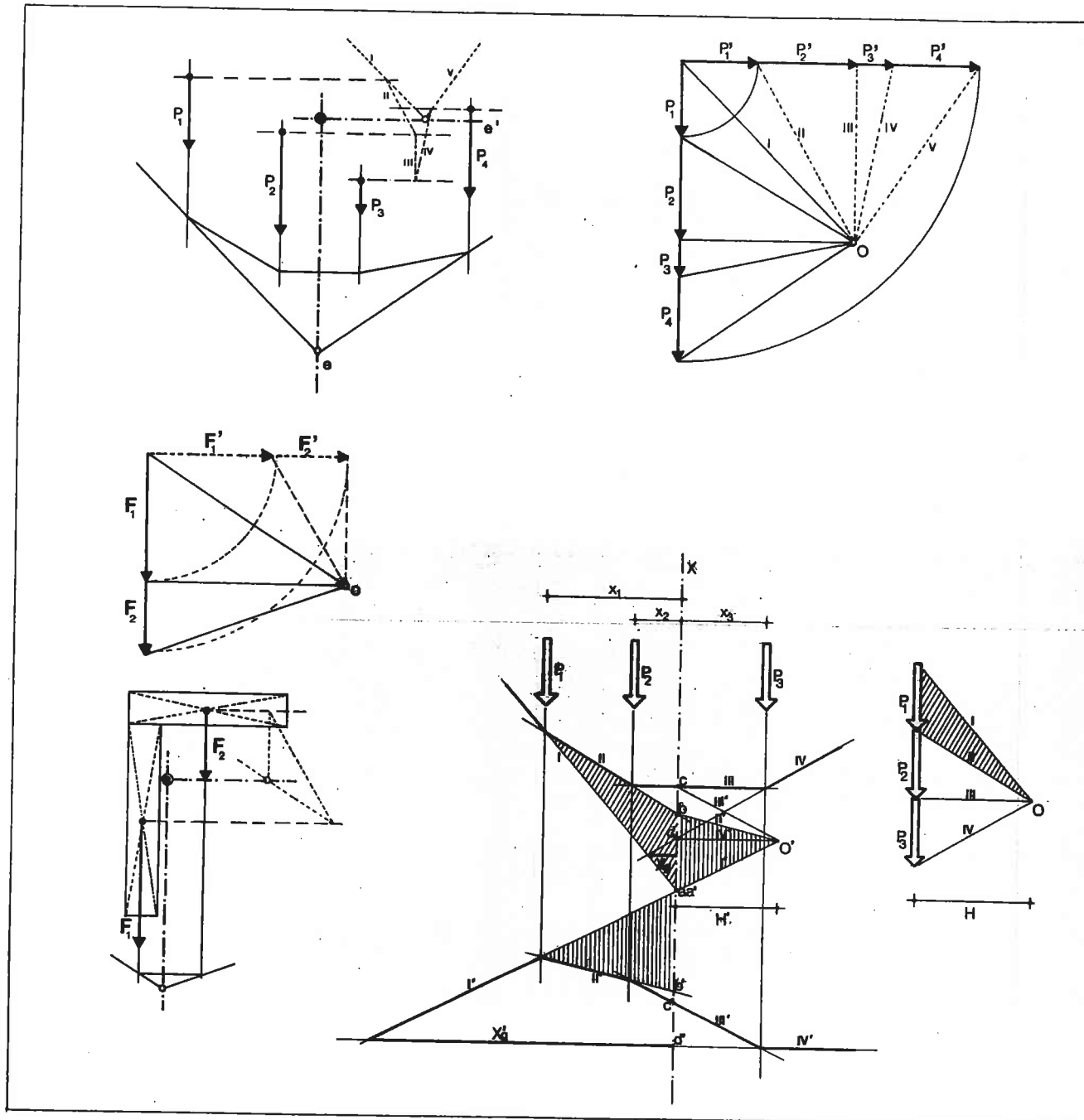
Supongamos un cuerpo previamente dividido en un sistema de masas (que para una dirección determinada equivalen a los pesos P_1, P_2 y P_3) y queremos obtener el momento de inercia de dicho cuerpo respecto al eje X .

Vamos a utilizar el método de Cullmann:

Comenzamos trazando, con un polo cualquiera O respecto del polígono de fuerzas, el polígono funicular I, II, III y IV; dichos lados cortan al eje X en los puntos a, b, c y d , respectivamente; considerando la semejanza entre los dos triángulos rayados con línea inclinada, vemos que $x_1/ab = \bar{H}/\bar{P}_1$, donde x_1 es la distancia de \bar{P}_1 al eje X , \bar{H} es la distancia polar y el guión superior distingue entre escala de fuerzas y escala de longitudes. De la igualdad anterior obtenemos $\bar{P}_1 \cdot x_1 = \bar{H} \cdot ab$, y, del mismo modo, obtendríamos $\bar{P}_2 \cdot x_2 = \bar{H} \cdot bc$, $\bar{P}_3 \cdot x_3 = \bar{H} \cdot cd$, y, por tanto, la suma será $\Sigma \bar{P}_i \cdot x_i = M = \bar{H} \cdot ad$ (nótese que los segmentos ab, bc , etc. son orientados, y, por tanto, hay que considerar su signo al sumarlos), donde M es el momento estático del sistema respecto al eje X .

Considerando ahora los segmentos ab, bc, cd , como vectores en las mismas líneas de acción de las fuerzas P_1, P_2 y P_3 , tomando un polo cualquiera O' , trazaremos otro polígono funicular I', II', III', IV', que cortará al eje en los puntos a', b', c' y d' ; observando ahora la semejanza entre los dos triángulos rayados verticalmente, podemos expresar:

$$x_1/a'b' = H'/ab, \text{ es decir, } ab \cdot x_1 = H' \cdot a'b'$$



donde H' es la distancia polar del nuevo polígono de 'fuerzas' que hemos considerado, pero como habíamos obtenido antes que

$$ab = \overline{P_1} \cdot x_1 / \overline{H} \quad , \quad \text{nos quedará } \overline{P_1} \cdot x_1^2 = \overline{H} \cdot H' \cdot a'b'$$

del mismo modo obtendríamos $\overline{P_2} \cdot x_2^2 = \overline{H} \cdot H' \cdot b'c'$
 $\overline{P_3} \cdot x_3^2 = \overline{H} \cdot H' \cdot c'd'$

y la suma será $\Sigma \overline{P_i} \cdot x_i^2 = \overline{I} = \overline{H} \cdot H' \cdot a'd'$
 donde I es el momento de inercia del sistema respecto al eje X .

Obsérvese que, mientras que en el primer funicular, los segmentos $ab, bc, etc.$ podrían tener direcciones contrarias (lo que significa que fuerzas a un lado del eje dan momento estático de distinto signo de las que están al otro lado), en el segundo funicular, todos los segmentos $a'b', b'c', etc.$ tienen la misma dirección (para el momento de inercia ninguna masa computa negativamente).

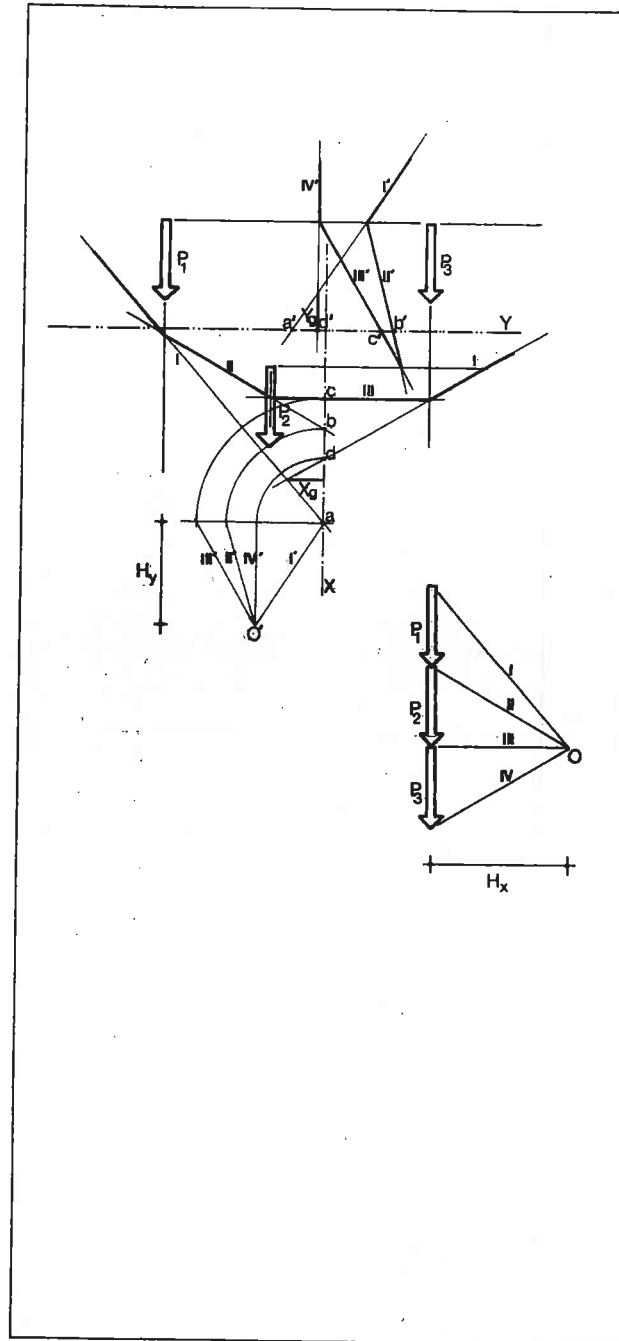
Basándonos en que la primera y la última línea de un polígono funicular nos determinan en su intersección la posición de la línea de acción de la resultante del sistema, podríamos también haber obtenido los respectivos momentos así:

$$M = X_g \cdot \Sigma \overline{P_i} \quad I = X_g \cdot X'_g \cdot \Sigma \overline{P_i}$$

donde X_g = distancia del c.d.g. del sistema de masas respecto al eje X .

X'_g = distancia del c.d.g. del sistema de vectores momentos estáticos al eje X

Cuando queremos obtener ambos momentos para una sección determinada, es útil expresar las escalas de longitudes en $cm.$, y la del polígono de fuerzas inicial (nos referimos a todos aquellos números que aparecen con un guión superior) en unidades de área, en $cm^2.$; obtendremos el momento estático en $cm^3.$ y el de inercia en $cm^4.$



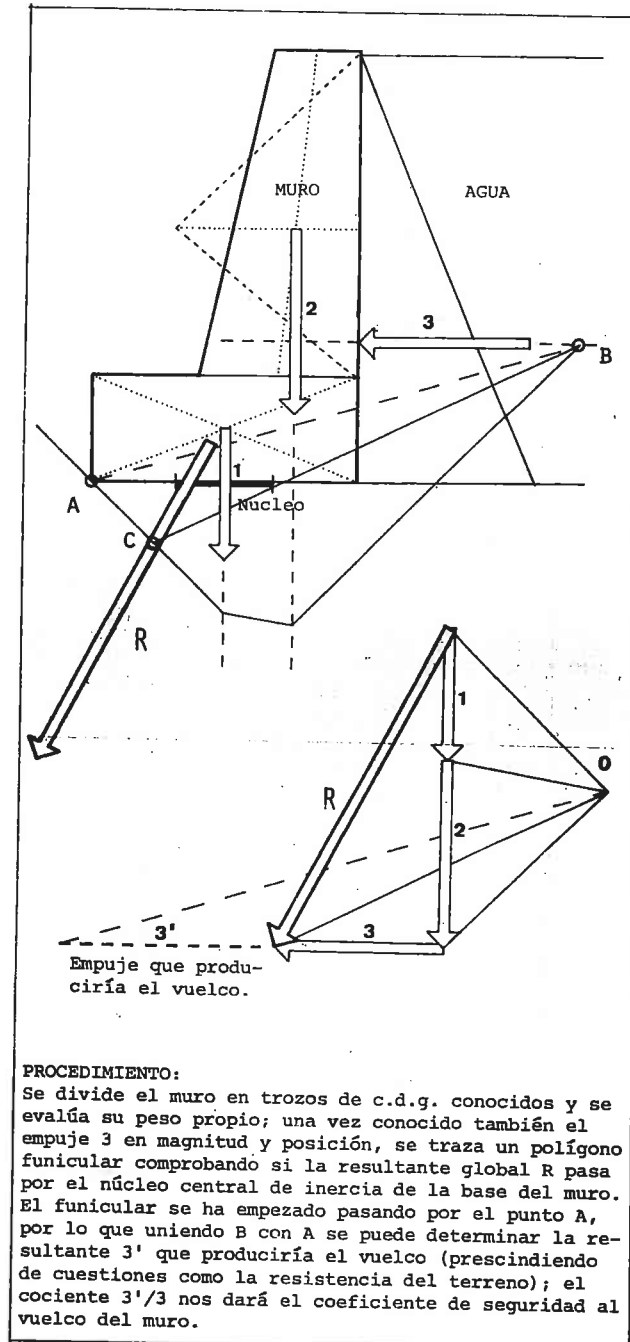
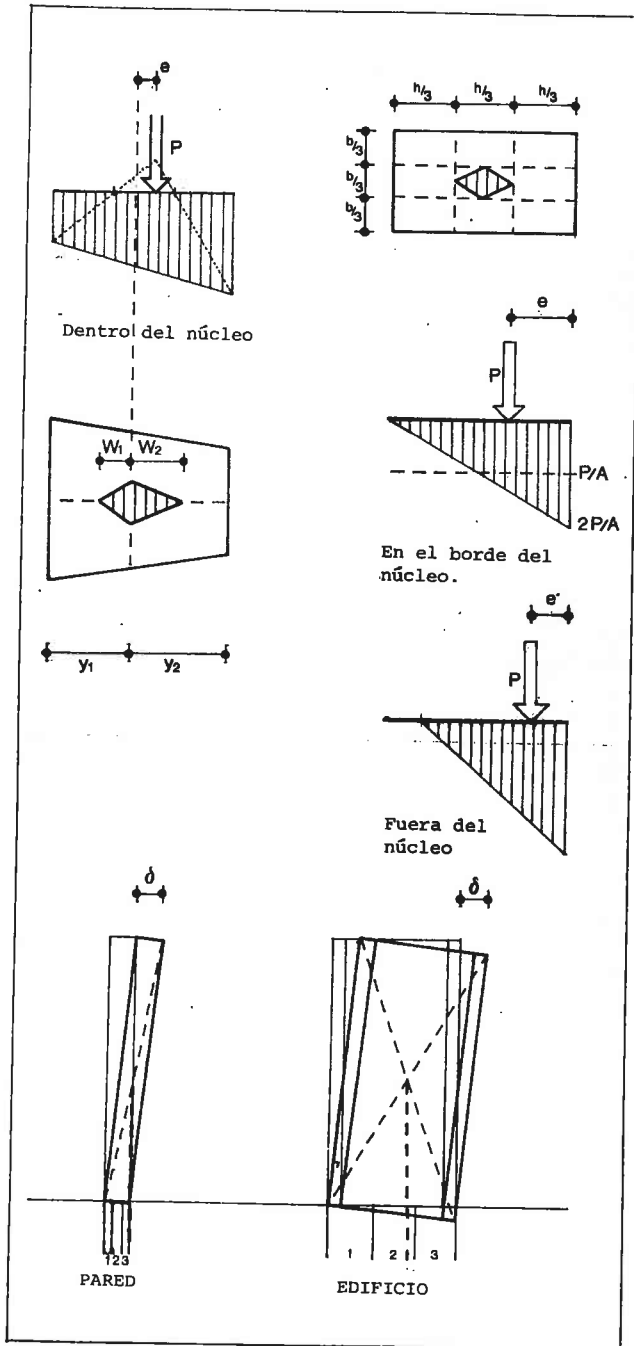
PRODUCTO DE INERCIA RESPECTO A DOS EJES

Primero obtenemos, igual que en el caso anterior, los momentos estáticos respecto a un eje (en la figura se ha hecho respecto al eje X), y después se consideran los vectores momentos estáticos ($ab, bc, etc.$) como paralelos al otro eje y se sigue la construcción como en el caso anterior, obteniéndose el producto de inercia como momento estático respecto a un eje de los momentos estáticos respecto al otro (en la figura se han girado 90° los vectores $ab, bc, etc.$ hasta hacerlos paralelos al eje Y y se han considerado también paralelos a dicho eje las líneas de acción del sistema de masas o áreas, con lo que se ha obtenido el segundo polígono funicular).

El resultado será: $I_{xy} = \overline{H'_x} \cdot H'_y \cdot a'd'$

o bien $I_{xy} = X'_g \cdot Y'_g \cdot \Sigma \overline{P_i}$

El resultado es el mismo operando primero con el otro eje.



NUCLEO CENTRAL DE INERCIA

Para una sección determinada está constituido por aquella zona de la misma en la que cualquier carga normal a la sección que actúe dentro de ella no producirá tracciones en la misma, es decir, todas las tensiones normales producidas serán de compresión.

Para una sección cualquiera, sus cotas ω_1 y ω_2 vendrán definidas por:

$$\omega_1 = I/A \cdot y_2 \quad \omega_2 = I/A \cdot y_1$$

donde I es el momento de inercia de la sección respecto a un eje de gravedad perpendicular a la excentricidad de la fuerza, A es el área de la sección, y_1 e y_2 son las distancias del c.d. g. a los extremos.

En el caso particular del paralelogramo, estas cotas valen ambas $h/6$ (h es el canto).

ESTABILIDAD

Quizás la aplicación más inmediata del concepto de núcleo central de inercia sea en las comprobaciones de estabilidad, ya que ésta va ligada normalmente a una unión con el terreno que raras veces permite la existencia de tracciones.

Para que una estructura sea estable, la resultante de las fuerzas en su base ha de pasar por el núcleo central de inercia de la misma (como regla general en la mayoría de los casos, que pasen por el "tercio" interior de la base).

Ante una misma excentricidad o inclinación (ver figuras de pared y edificio) el que la sección de la base tenga o no un núcleo más ancho puede hacer que sea o no estable.

Los mismos razonamientos anteriores cabría hacerlos con la acción horizontal sobre edificios. Como ejemplo sencillo se comprueba la estabilidad de un muro de contención de aguas

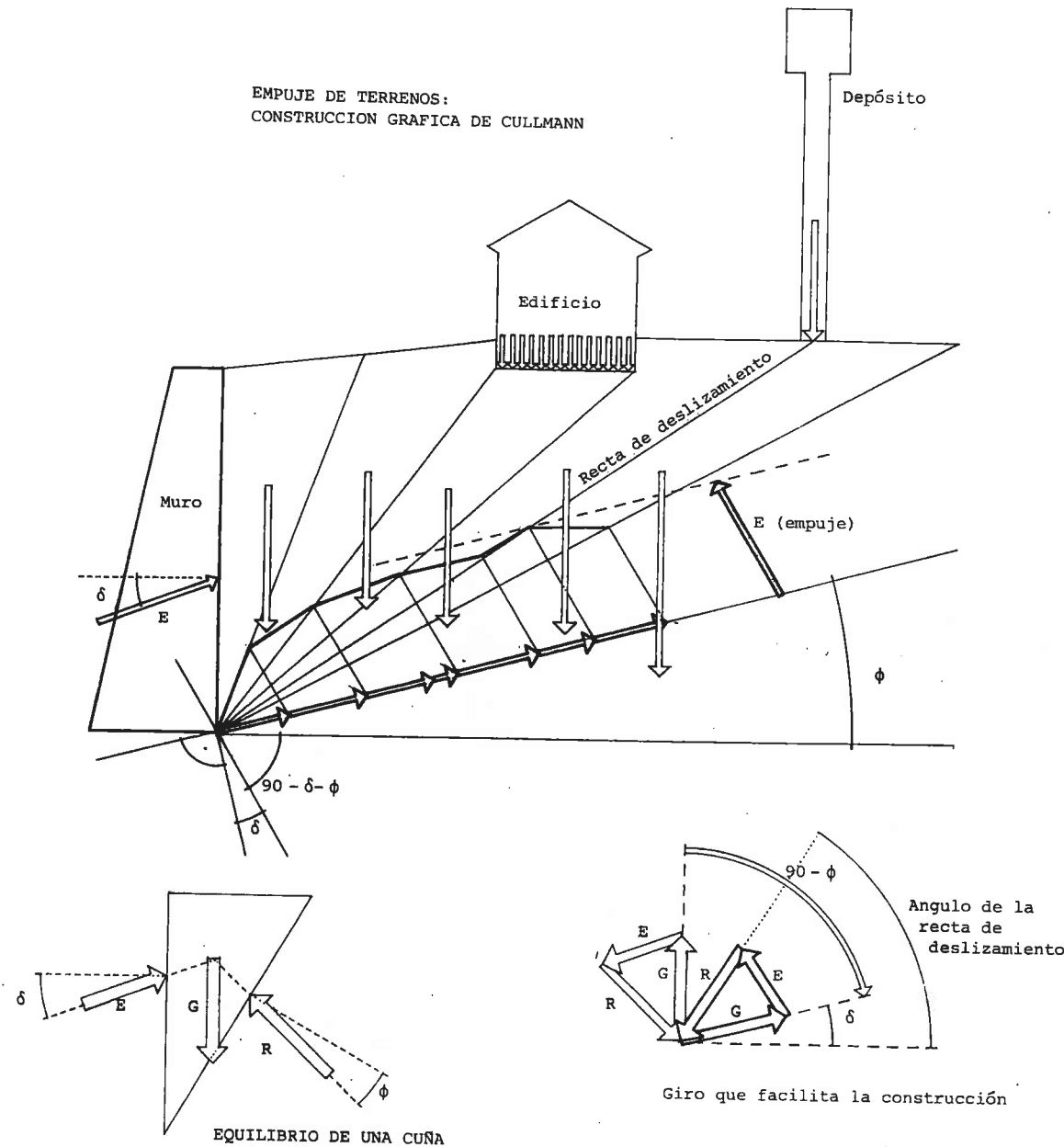
EMPUJE DE TIERRAS

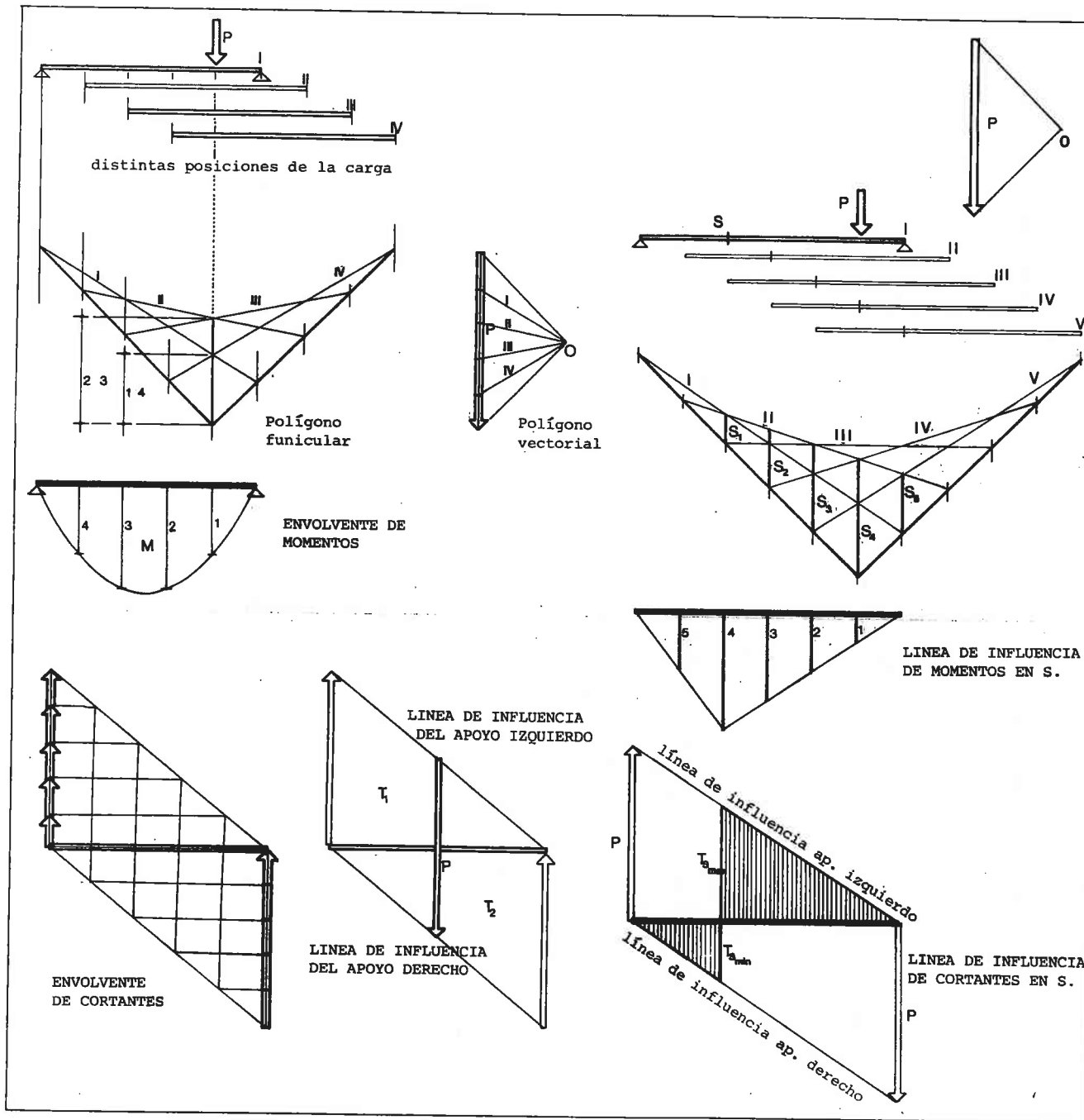
Los métodos gráficos de cálculo tienen una de sus más importantes aplicaciones en Mecánica del Suelo, sobre todo en el cálculo de empujes. Veremos aquí el método, quizás más sencillo, llamado *construcción gráfica de Cullmann*. La condición de equilibrio de una cuña de terreno es que formen un polígono de fuerzas cerrado el peso de la cuña G , el empuje E que la misma ejerce, y la resultante R de las fuerzas reacción del resto del suelo sobre la cuña. G está aplicado en el centro de gravedad de la cuña; E formará un ángulo δ de rozamiento con el muro; R formará con la superficie de deslizamiento de la cuña un ángulo ϕ de rozamiento interno del terreno.

Si representamos dicho polígono de fuerzas con éstas en sentido contrario y lo giramos un ángulo de $90^\circ - \phi$, nos quedará el peso de la cuña formando el ángulo ϕ con la horizontal, el empuje sobre el muro formando un ángulo de $90^\circ - \phi - \delta$ con la horizontal, y la reacción R quedará coincidiendo en dirección con la línea de deslizamiento considerada. Esto permite trazar distintas líneas de deslizamiento en el terreno para comprobar cuál es la que proporciona un mayor empuje sobre el muro.

Se divide el terreno en cuñas trazando rectas de deslizamiento arbitrarias, coincidiendo preferentemente con puntos singulares en el terreno. Lógicamente, la línea de deslizamiento posible menos inclinada será la que forme un ángulo ϕ con la horizontal. Se determina el peso de cada cuña, incluida la sobrecarga que tenga encima, y su valor, en una determinada escala de fuerzas, se lleva consecutivamente sobre la línea que forma ángulo ϕ con la horizontal. Por el extremo de cada una de las fuerzas se lleva una paralela a la dirección del empuje sobre el muro (una vez girado todo) hasta que corte a la línea de deslizamiento que le corresponda; el segmento interceptado es el valor del empuje correspondiente para esa línea de deslizamiento. Uniendo los extremos de estos segmentos obtenemos una curva cuyo máximo es el empuje buscado; basta trazar la tangente paralela a la línea donde están los pesos. Por el punto de tangencia pasa la línea de deslizamiento. La profundidad del punto de aplicación del empuje puede obtenerse mediante métodos gráficos.

EMPUJE DE TERRENOS:
CONSTRUCCION GRAFICA DE CULLMANN





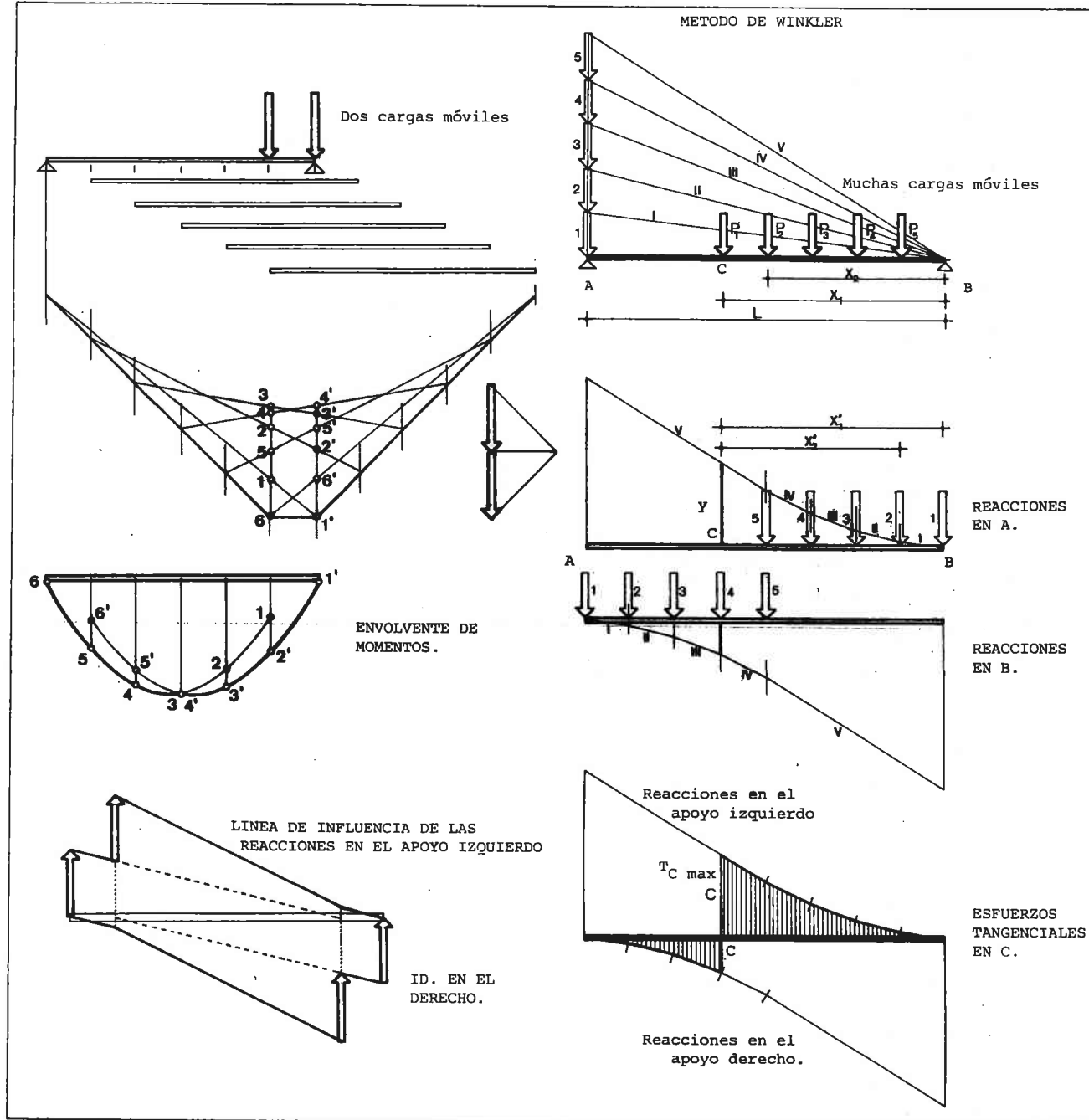
VIGA APOYADA CON CARGA MOVIL

Quando queremos conocer el efecto de una carga aislada P que se mueve sobre una viga, se trazan los polígonos vectorial y funicular correspondientes a dicha carga y se supone que, permaneciendo fija ésta, se mueve la viga. Así, el polígono funicular no cambia y las verticales en los apoyos se trasladan, teniendo cada vez una línea de cierre distinta.

Midiendo en la vertical correspondiente a la posición de la carga podemos dibujar el diagrama envolvente de momentos, que es una parábola como fácilmente se puede demostrar de forma analítica. Las distintas paralelas en el polígono vectorial a las líneas de cierre nos van dando las reacciones en ambos apoyos según la posición de P , valores con los que también podemos trazar la envolvente de cortantes.

También podemos representar las líneas de influencia de los apoyos, es decir, las líneas que nos expresan el valor de la reacción en el apoyo izquierdo T_1 y la reacción en el apoyo derecho T_2 para cualquier posición de P en la viga (la suma de T_1 y T_2 siempre será la fuerza P).

Si lo que queremos es determinar el efecto de P sobre una sección S determinada, mediremos las ordenadas del polígono funicular debajo de la posición de S en cada caso, y podemos representar la línea de influencia de momentos sobre S de la carga móvil P sin más que colocar las ordenadas en las abscisas correspondientes a la posición de P . La línea de influencia de cortantes en S vendrá dada por la zona rayada entre las líneas de influencias de las reacciones en los apoyos (el cortante cambiará de signo en S al pasar la carga de un lado al otro rebasando la sección S).



Cuando son dos las cargas móviles (el caso de un vehículo sobre un puente, por ejemplo), se opera igual que antes: tras dibujar los polígonos vectorial y funicular, medimos las ordenadas (momentos flectores) en la vertical de las cargas (máximos momentos), y al ordenarlas sobre la viga se obtiene la curva envolvente de momentos flectores. Las líneas de influencia de las reacciones en los apoyos serán resultado de la superposición (con el desfase de la separación de las cargas) de las debidas a cada una de las cargas.

METODO DE WINKLER

Es éste un método sencillo para determinar los máximos esfuerzos tangenciales en una sección y las reacciones en los apoyos cuando existan muchas cargas móviles.

PROCEDIMIENTO:

Se colocan las cargas P_1, P_2, P_3, \dots en orden inverso sobre AB, por consiguiente, P_1 sobre B, y se traza la perpendicular a AB en A, y sobre ella se llevan sucesivamente, partiendo de P_1 y el punto A, todas las cargas que actúan sobre AB, constituyendo así un polígono vectorial, y se construye el funicular correspondiente tomando como polo el punto B y partiendo de este mismo punto. Toda ordenada y limitada por el polígono funicular y la prolongación de su primer lado, que coincide con AB, representa el máximo esfuerzo tangencial correspondiente a la sección situada en la misma vertical de la ordenada y. El polígono funicular construido también es la línea de influencia de la reacción en el apoyo izquierdo.

Para el apoyo derecho (y, del mismo modo, para los máximos esfuerzos tangenciales de signo contrario a los anteriores), haríamos lo mismo con el mismo polígono vectorial y empezando la construcción del polígono funicular desde A y por la izquierda.

Se demuestra fácilmente tomando momentos respecto a B:
 $R_A \cdot L = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \dots = \sum P_i \cdot x_i$
 y como $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2 \dots$ nos queda
 $R_A \cdot L = \sum P_i \cdot x_i = \sum P_i \cdot x'_i$ y como hemos dibujado el polígono funicular con distancia polar L, el momento del sistema P_1, P_2, \dots, P_5 respecto al punto C es
 $y \cdot L = \sum P_i \cdot x'_i$, por tanto, cuando P_1 está sobre C, es $y = R_A = T_C \text{ max.}$

DEFORMACIONES EN VIGAS TRIANGULADAS.
METODO DE WILLIOT-MOHR.

Una vez determinados los esfuerzos y las secciones en cada barra, podemos calcular las variaciones de longitud de cada una de ellas mediante:

$$\Delta L_i = \frac{F_i L_i}{A_i E} + \alpha \cdot t \cdot L_i$$

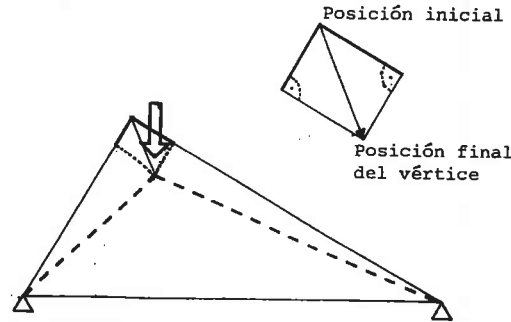
donde el primer sumando representa la variación de longitud debida a la carga exterior y el segundo la debida a la variación de temperatura (F_i es el esfuerzo normal en la barra; L_i es su longitud; A_i es su sección; E es el módulo de elasticidad del material, 2.100 to/cm². para el acero; α es el coeficiente de dilatación térmica, 12.10⁻⁶ m/m °C para el acero; t es la variación de la temperatura).

Sabiendo la variación de longitud experimentada por cada barra, podemos determinar la posición deformada barra a barra, a partir de puntos cuya situación deformada es ya conocida (empezaríamos con los apoyos, por ejemplo).

En la práctica, los corrimientos ΔL_i son muy pequeños y se necesitaría un dibujo de la estructura a una escala muy grande para obtener una mínima precisión. Por otro lado, al ser las deformaciones pequeñas en comparación con la longitud de las barras, la rotación angular de una barra cualquiera es tan pequeña que puede suponerse que, durante el giro, un punto se mueve según la tangente trazada perpendicularmente a la dirección original de la barra, en lugar de sobre el arco verdadero.

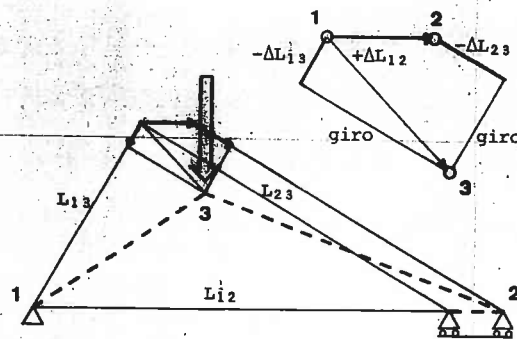
La introducción de esta simplificación hace posible obtener los corrimientos de los nudos sin dibujar toda la longitud de las barras, porque ya no es necesario trazar los arcos alrededor de los centros de giro.

Al sustituir el arco por la tangente, en los giros, se comete muy poco error debido a la pequeña magnitud de las deformaciones.



Al dibujar sólo las deformaciones se obtiene mayor precisión, puesto que la escala de las mismas puede aumentarse convenientemente.

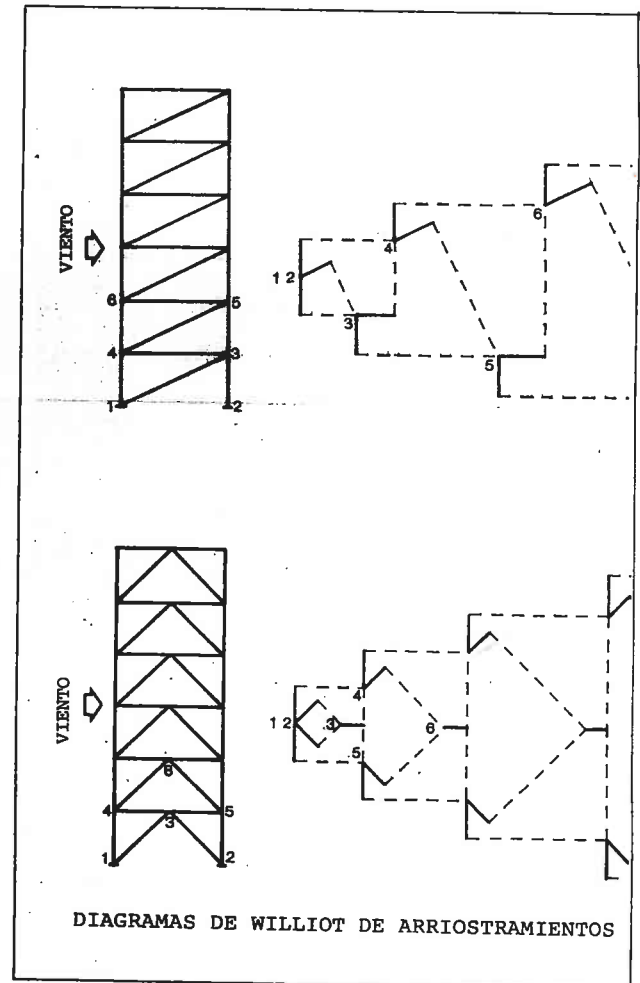
DIAGRAMA DE WILLIOT:

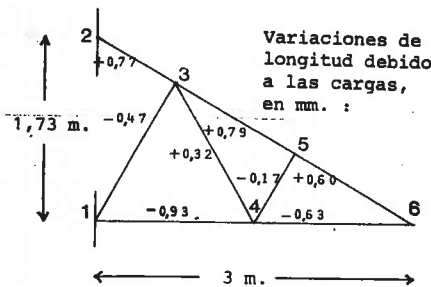
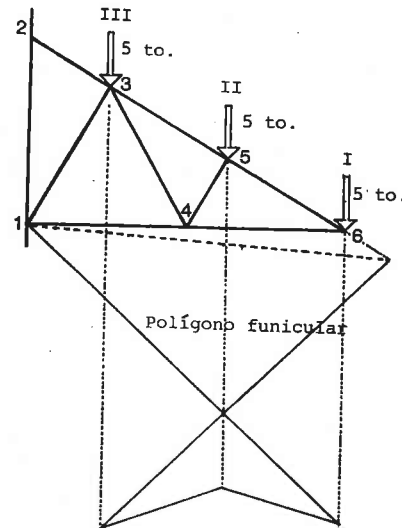
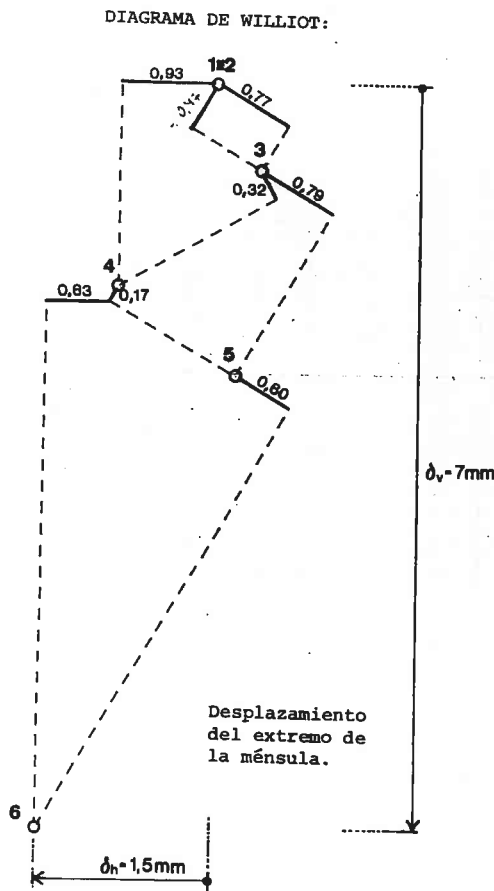
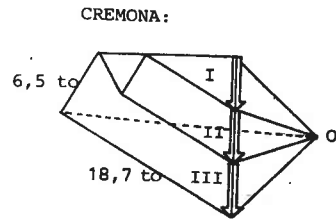


PROCESO:

Partiendo del nudo fijo 1, se traza el vector desplazamiento $+\Delta L_{12}$ que nos sitúa el nudo 2 (el signo + significa alargamiento, y el sentido del movimiento es hacia la derecha de su posición inicial). Situados 1 y 2, el nudo 3 desciende $-\Delta L_{13}$ hacia la izquierda respecto a la posición de 1, y desciende $-\Delta L_{23}$ hacia la derecha respecto a la posición de 2 (el signo - indica acortamientos); trazando las perpendiculares a estos vectores (que representan los giros que experimentan las barras para que los dos acortamientos sean compatibles) se obtiene la posición del nudo 3. El vector 13 representa el desplazamiento del nudo 3.

El diagrama de Williot contiene sólo las variaciones de longitud de las barras y las tangentes a los arcos de giro, permitiéndonos hallar los movimientos relativos de los diversos nudos. Partiendo de un punto fijo inicial vamos obteniendo el desplazamiento relativo de cada nudo respecto a su posición fija inicial, trabajando siempre con un triángulo formado por tres nudos del que se hayan situado ya dos de ellos.





Todas las secciones tienen el mismo área: 10 cm^2 .

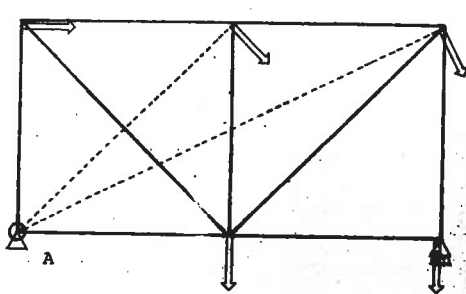
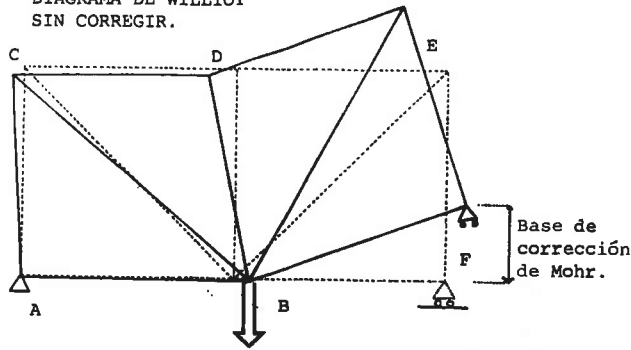
El módulo de elasticidad del material es: 2100.000 kg/cm^2 .

Aunque en este caso el método de Cremona nos facilita directamente las reacciones en los 'apoyos', se ha dibujado el polígono funicular que nos permitiría obtener inicialmente las reacciones si fuese necesario.

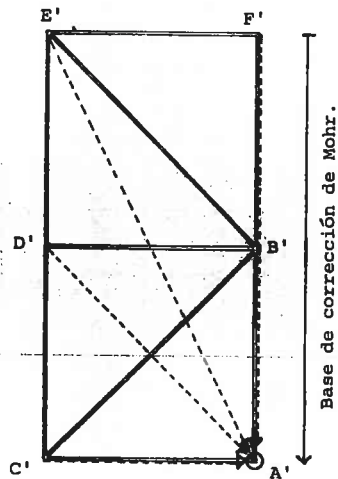
Como ejemplo de aplicación, se calcula la deformación de una cercha en ménsula. En primer lugar se obtienen los esfuerzos en cada barra (mediante el procedimiento de Cremona, por ejemplo); dividiendo los esfuerzos en cada barra por la sección que le correspondía (en el ejemplo numérico se ha tomado una misma sección A para todas las barras) y multiplicando por la longitud de la barra obtenemos las variaciones de longitud de cada una de ellas. Los nudos 1 y 2 permanecen fijos, mientras que los demás tienen un desplazamiento relativo respecto a su posición inicial expresado por el diagrama de Williot.

Si no conocemos la posición de dos nudos contiguos, al menos, para dibujar el diagrama de Williot, podemos hacer la hipótesis arbitraria de que alguna barra permanece fija en dirección, esto es, que el movimiento relativo de los nudos de los extremos de esa barra es paralelo a la misma e igual a la variación de longitud; si la hipótesis no era correcta (nos aparece desplazado verticalmente un apoyo, cuando dicho nudo debería haber permanecido en su horizontal, por ejemplo) habrá que añadir el diagrama de corrección de Mohr, que equivale a efectuar un giro en la viga triangulada con centro en el punto fijo conocido, hasta hacer coincidir los nudos con las condiciones de contorno conocidas (otro extremo apoyado, otra barra fija en dirección, etc.).

DEFORMADA OBTENIDA SEGUN DIAGRAMA DE WILLIOT SIN CORREGIR.



Las flechas indican la misma magnitud de giro para todos los nudos. El desplazamiento que experimentará cada nudo con el giro alrededor de A será proporcional a su distancia a A y en dirección perpendicular a la recta de unión del nudo con A.



VECTORES DESPLAZAMIENTO debido al giro (de puntos) a escala adecuada para la corrección

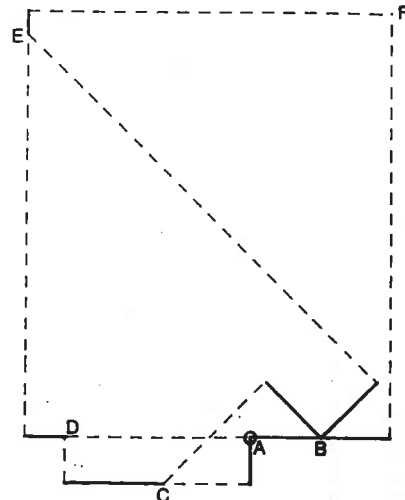
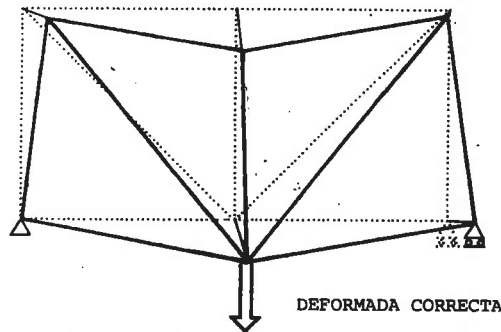


DIAGRAMA DE WILLIOT

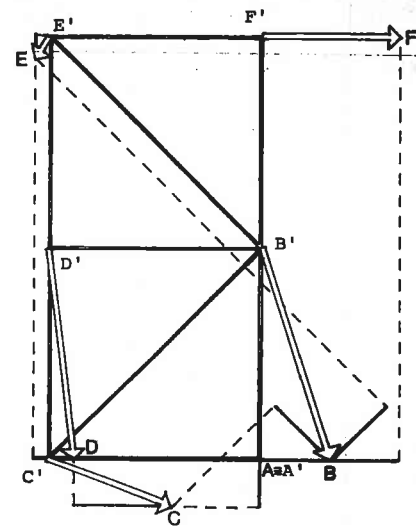
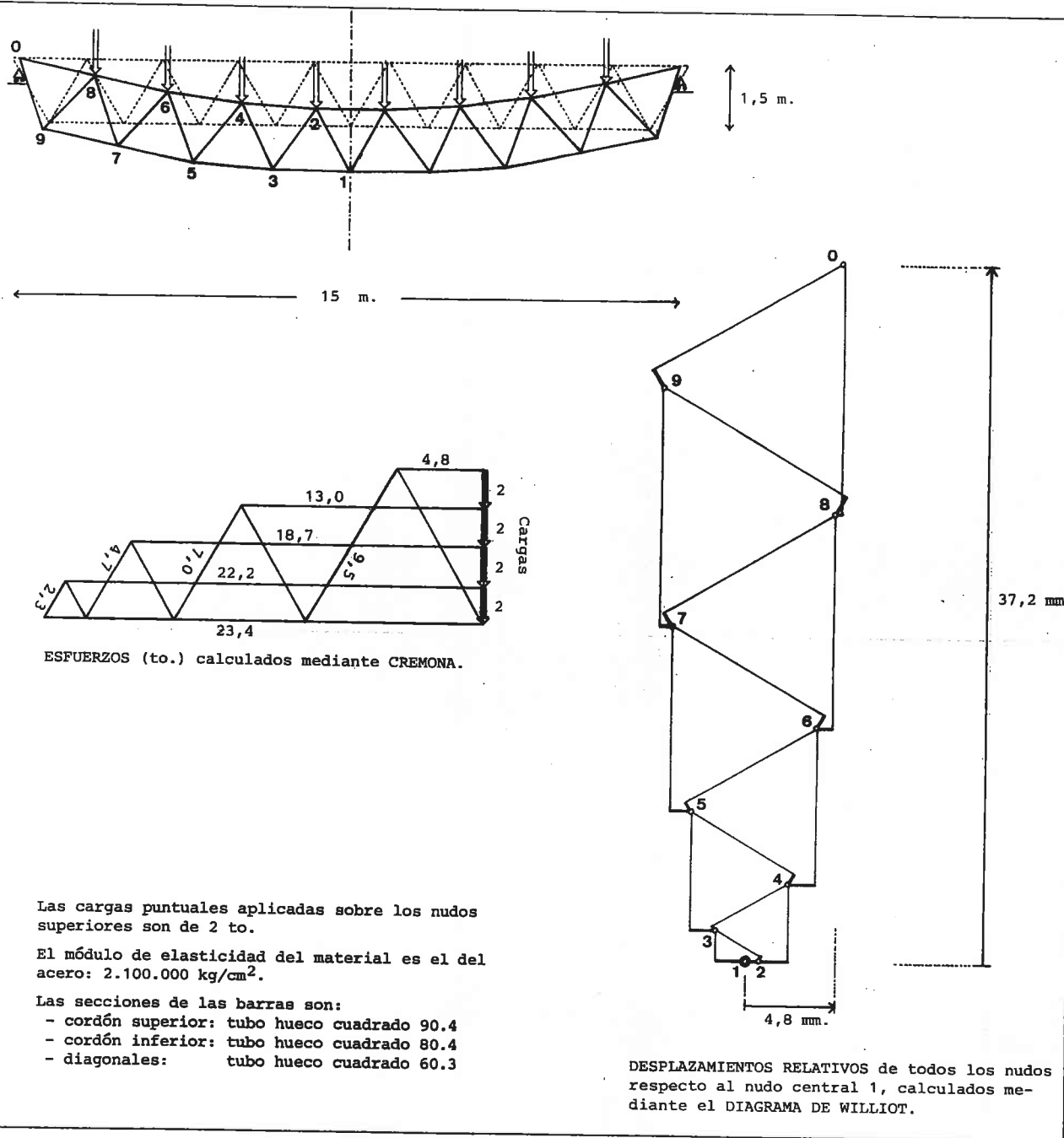


DIAGRAMA DE WILLIOT Y CORRECCION DE MOHR.

En la figura tenemos una viga triangulada sometida a la acción de una carga vertical. Una vez obtenidas las variaciones de longitud de cada una de las barras procedemos a dibujar el diagrama de Williot. Si empezamos por el punto A (nudo inicial que no tiene corrimientos), al no ser también fijos ninguno de los dos nudos contiguos, no podemos dibujar con certeza los corrimientos relativos del resto de los nudos; suponemos arbitrariamente que el punto B se mantiene en la deformación en la misma dirección que tiene la barra, en la horizontal, y así dibujamos todo el diagrama. Al final hemos obtenido que el punto F se ha movido hacia la derecha (posible) y hacia arriba (no posible); habrá que girar toda la cercha hasta hacer coincidir F con su horizontal original.

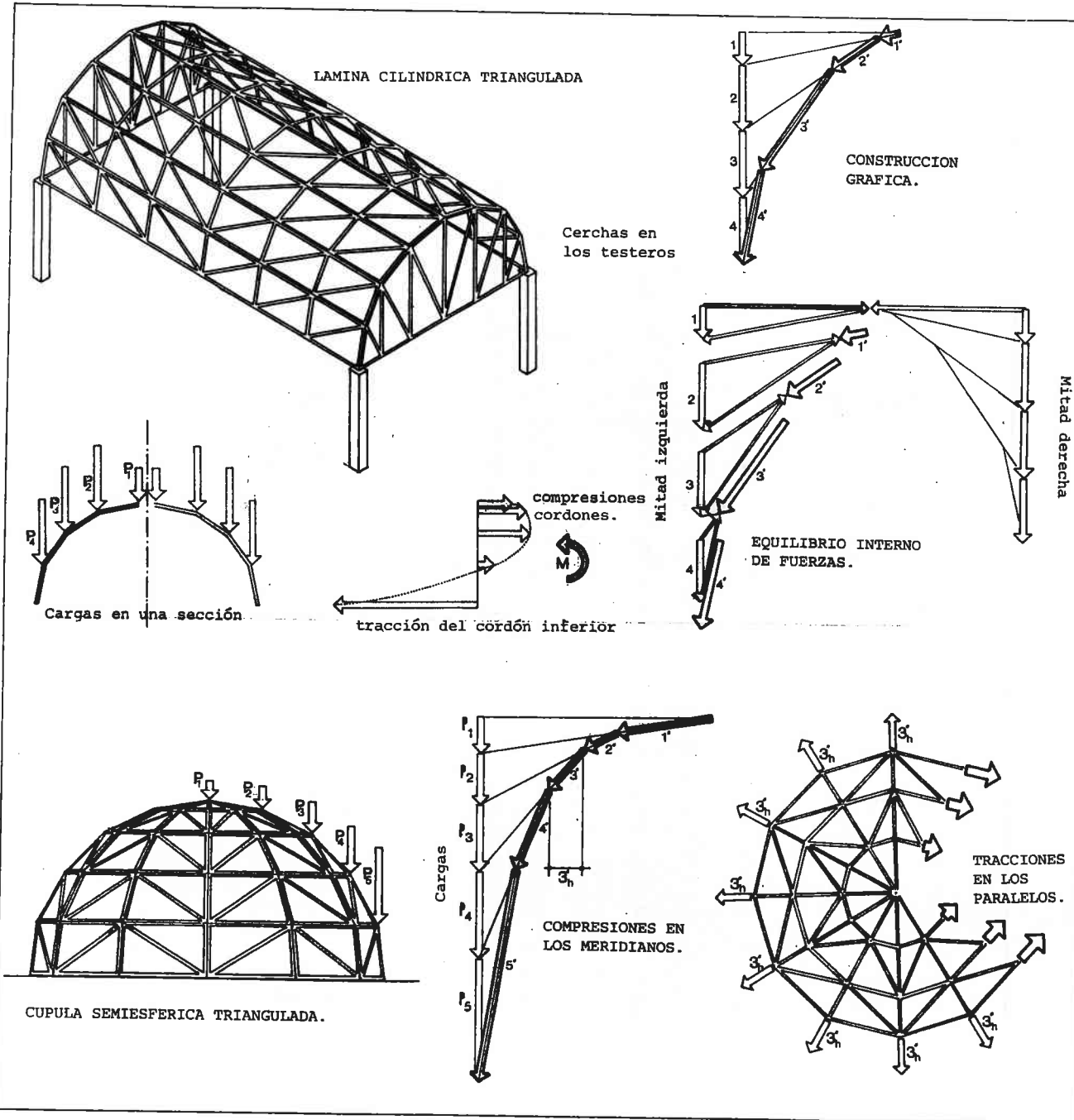
El diagrama de corrección de Mohr se basa en que el dibujo de la cercha perpendicularmente (a la escala conveniente para que F vuelva a su horizontal), girándola sobre el punto fijo A, expresa los vectores del movimiento debidos al giro que queremos efectuar (por ejemplo, $\overline{E'A'}$ expresa el desplazamiento que tiene el nudo E cuando giramos la cercha alrededor de A). Sumando estos vectores a los obtenidos en el diagrama de Williot obtendremos los desplazamientos reales de cada nudo; basta por tanto superponer a dicho diagrama el dibujo de la cercha girado 90° ; el corrimiento de un nudo cualquiera vendrá dado en magnitud y dirección por el vector que une el punto del diagrama de Mohr con el punto del diagrama de Williot ($\overline{E'E}$ es la suma de la deformación calculada inicialmente y el giro de la corrección).



Sin embargo, en el caso de cerchas doblemente apoyadas con una clara simetría (en las que normalmente nos interesa el descenso del punto central), es mucho más sencillo operar de modo que aprovechemos su condición simétrica; tomando en estos casos como punto fijo inicial en el diagrama de Williot un nudo que esté situado en el eje de simetría, el diagrama para la mitad de la cercha nos dará los desplazamientos relativos de todos los nudos de un lado (el otro será simétrico) respecto al punto considerado como fijo (por ejemplo, la flecha máxima será normalmente el movimiento relativo hacia arriba experimentado por el apoyo del lado que estemos considerando).

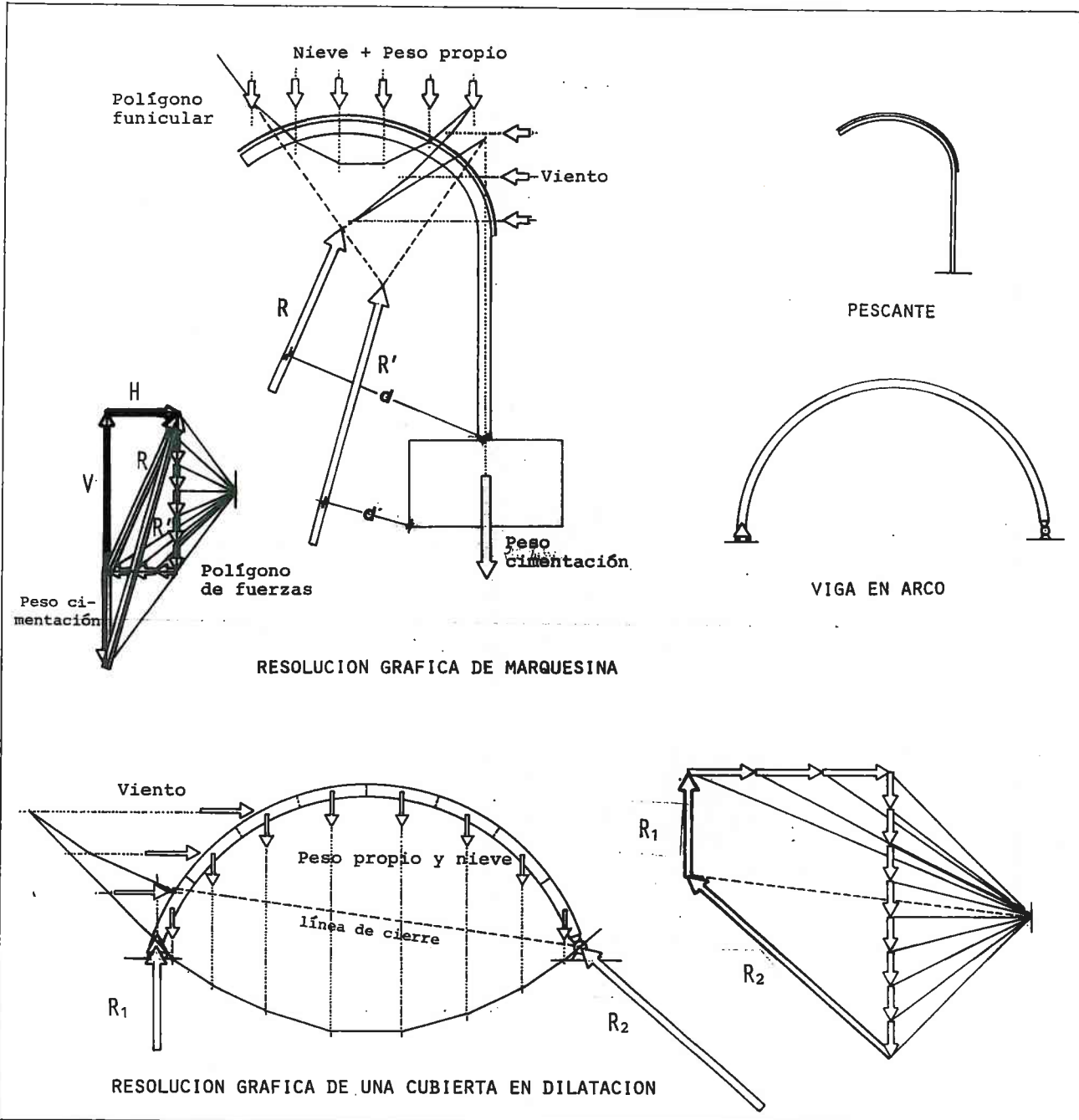
LAMINA CILINDRICA TRIANGULADA

Las láminas trianguladas pueden ser analizadas con bastante aproximación mediante la Estática y, por tanto, mediante métodos gráficos. En el caso de la bóveda semicilíndrica sujeta por dos cerchas en sus testeros, se puede suponer que está formada por un conjunto de vigas trianguladas biapoyadas cargadas cada una de ellas con las fuerzas 1', 2', 3' y 4', según su inclinación; fuerzas de inmediata obtención gráfica, que serán transmitidas mediante flexión en las vigas hasta los apoyos en los testeros. Los cordones de dichas vigas son compartidos, es decir, el inferior de una es el superior de la inmediata, etc.; al componer los esfuerzos en los cordones se obtiene un esquema de tracción y compresiones similar al que aparece en láminas continuas, y que equilibra en cada punto el momento flector actuante. El cortante es resistido por las diagonales, y será también proporcional a 1', 2', etc.



CUPULAS TRIANGULADAS

Como en el caso anterior, una sencilla construcción gráfica nos proporciona los esfuerzos de compresión en el sentido de los meridianos, esfuerzos que crecen lógicamente hacia abajo. Mediante equilibrios de fuerzas podemos obtener a partir de ellos las sollicitaciones en el resto de las barras.



ARCOS. INTRODUCCION

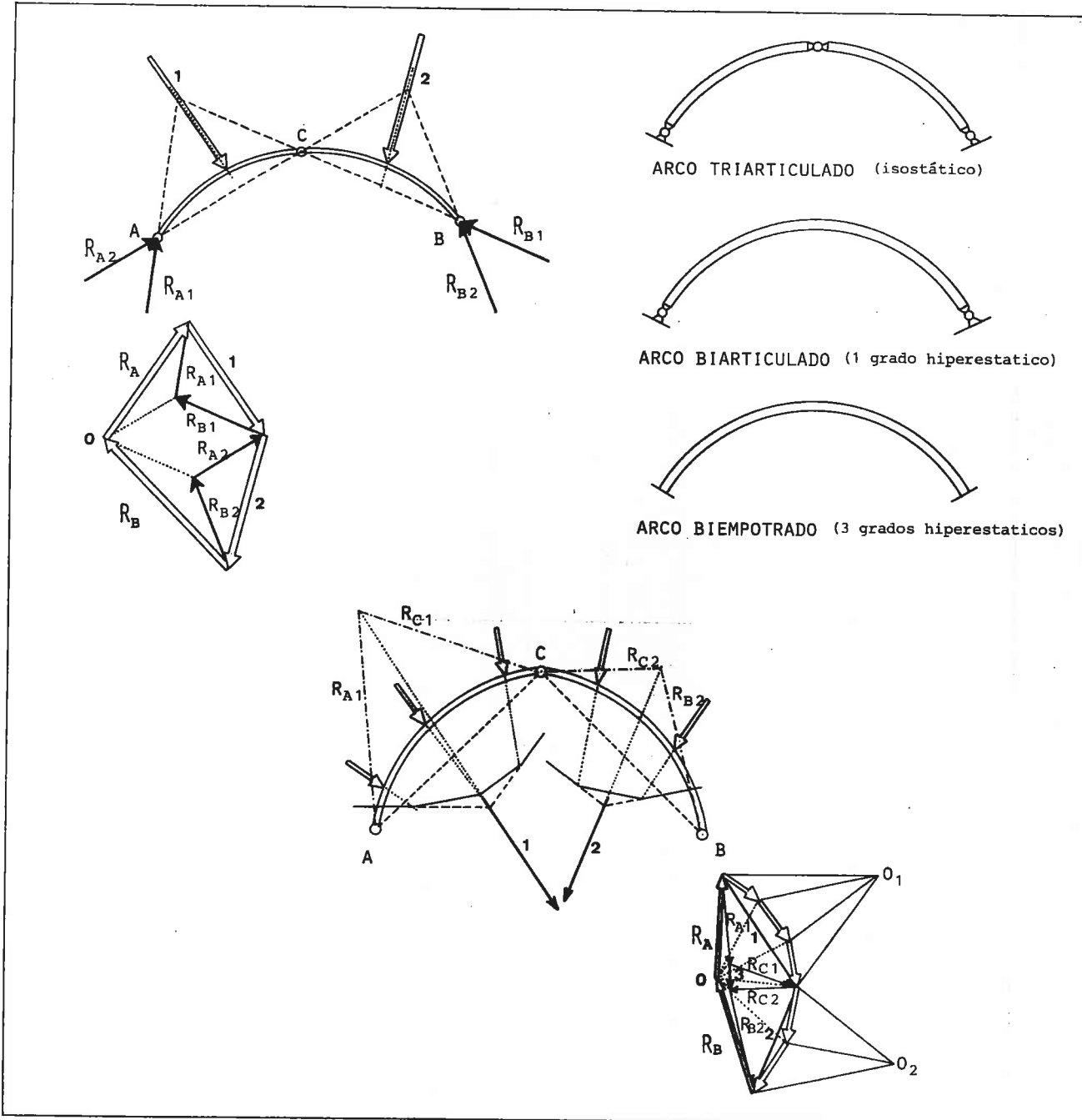
Quizás el capítulo más importante dentro de los metodos de cálculo gráficos sea el de los arcos. Los tipos de arcos isostáticos más elementales son el pescante o arco en ménsula y el arco apoyado en dilatación o viga en arco, correlativos de la viga en voladizo y de la doblemente apoyada. Realmente no son propiamente arcos, al no tener empujes, su forma de trabajo se asemeja a la de las vigas (predominan las flexiones); digamos que de arcos sólo tienen la forma, o sea, sólo son piezas curvas. De todos modos, se plantean dos casos equivalentes (marquesina y cubierta en dilatación) que pueden presentarse en la realidad.

MARQUESINA:

Se construye el polígono de fuerzas y el polígono funicular de las fuerzas actuantes. R es la resultante de las acciones sobre la cubierta de la marquesina. R.d es el máximo momento flector que aparece en la pieza curva resistente, y se produce justo en el arranque de la cimentación. Mientras más grande y descentrada sea R, peor será la sollicitación. Respecto a la estabilidad global del conjunto, la introducción de un peso importante en la cimentación, aumenta el valor de R (ahora R'), pero consigue centrar sensiblemente la resultante del sistema de fuerzas. Habría que conseguir que R' estuviera dentro, suficientemente, de la base de la cimentación, o bien, anclar la base a un sistema que pudiera resistir tracciones (solera existente, cimentación de mayor peso, estructura cercana...). El momento de vuelco es R'.d'

CUBIERTA EN DILATACION:

En el apoyo derecho tenemos una articulación, en el izquierdo un simple apoyo en dilatación, que sólo puede aportar reacciones verticales. Con esta condición, es fácil obtener ambas reacciones (R1 vertical y R2 inclinada), sin más que empezar trazando el polígono funicular por la articulación derecha, y terminar obteniendo el otro punto por donde pasa la línea de cierre en la intersección del último tramo del polígono funicular con la vertical del apoyo izquierdo.



Los arcos propiamente dichos más frecuentes, en los que el empuje tiene importancia esencial, son el arco doblemente articulado (hiperestático de primer orden), el doblemente empotrado (hiperestático de tercer orden) y, introduciendo una articulación interior en el biarticulado, tendríamos el arco de tres articulaciones, isostático.

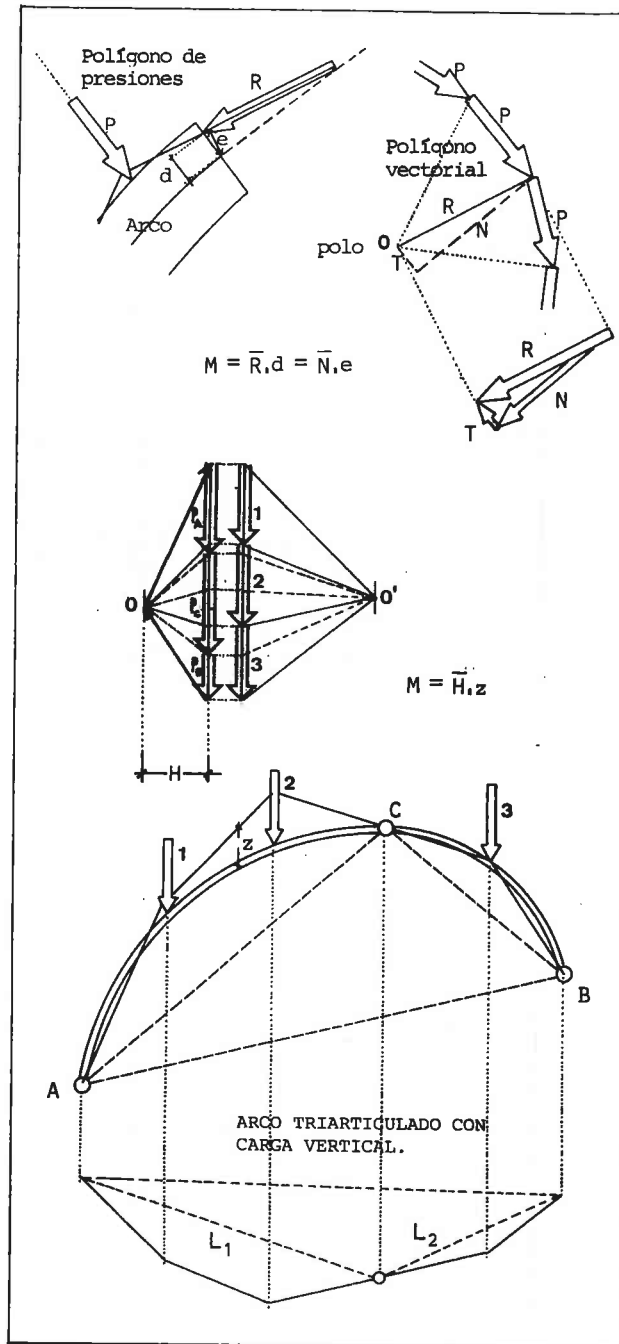
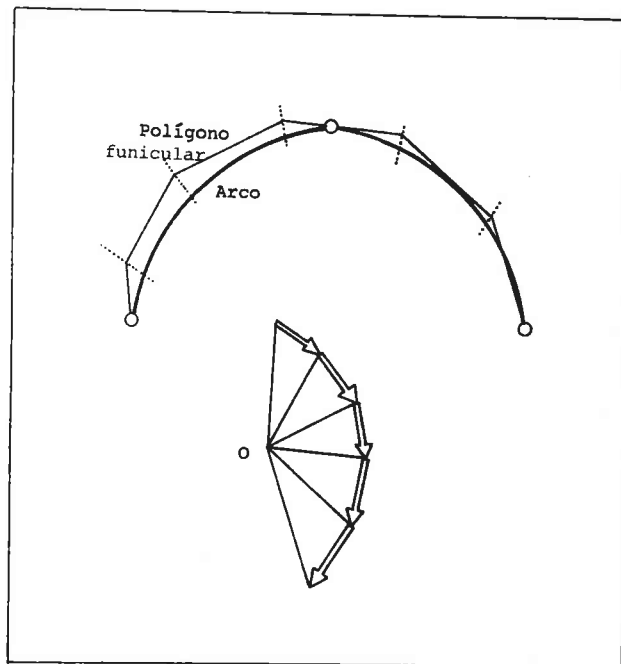
ARCO TRIARTICULADO

Se supone el arco compuesto por dos piezas, AC y BC. La resultante de las fuerzas que actúan sobre cada trozo (1 y 2 en la figura) se descomponen en reacciones que pasen por las articulaciones (1 queda descompuesta en R_{A1} y R_{B1} , y la fuerza 2 en R_{A2} y R_{B2}); componiendo a su vez las fuerzas en A y en B, tendremos finalmente R_A y R_B . En la figura, el punto O que cierra el polígono de fuerzas, se obtiene trazando el paralelogramo formado con la paralela a R_{A2} y la paralela a R_{B1} , de modo que queda R_A como suma de R_{A1} y R_{A2} , y R_B como suma de R_{B1} y R_{B2} .

En la otra figura, aparece otro arco triarticulado sometido a la acción de varias fuerzas. Mediante dos polos cualesquiera O_1 y O_2 obtenemos las resultantes 1 y 2 que actúan sobre cada una de las partes del arco. Entonces podríamos operar como en el caso anterior, pero puede ocurrir que las líneas que une las articulaciones corten muy afuera del papel a las resultantes 1 y 2; bastan entonces descomponer arbitrariamente 1 y 2 en fuerzas que pasen solamente por las articulaciones inmediatas (1 en R_{A1} y R_{C1} y 2 en R_{B2} y en R_{C2}), y la resultante 3 sobre la articulación central (3 es la suma de R_{C1} y R_{C2}) se descompone a su vez en fuerzas que pasen por A y por B; sumando las fuerzas en A y en B se obtienen R_A y R_B .

POLIGONO DE PRESIONES

Para el último arco triarticulado resuelto, podemos trazar un funicular con polo O y la línea de acción de R_A (o de R_B) como primer lado. Cada uno de los sucesivos lados de este funicular es precisamente la línea de acción de la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda; la magnitud de esta resultante es justamente el radio polar correspondiente. Tal polígono recibe el nombre de *polígono de presiones*. Este polígono pasa necesariamente por B y C (una vez empezado por A), puesto que el momento en las articulaciones es nulo, por tanto, el *polígono de presiones es el funicular de las cargas que pasa por las tres articulaciones*. Esta misma propiedad la podíamos haber utilizado para trazarlo (problema de trazar un funicular que pase por A, B y C).



El polígono de presiones permite obtener en cualquier punto los valores M (momento flector) N (solicitación axial) y T (solicitación tangencial). El valor de M se obtiene en cualquier punto multiplicando la magnitud de la resultante (fuerza) R por la distancia d (en escala de longitudes del arco) desde el punto considerado del arco hasta la línea de acción de la resultante. Las componentes normal N y tangencial T se obtienen descomponiendo el radio polar R sobre los ejes principales (normal y transversal) de la sección del arco. También puede obtenerse M mediante el producto de N por e, distancia del punto del arco considerado al punto por donde pasa R en la misma sección (excentricidad de la resultante).

Vemos que el trazado del polígono funicular de un arco nos proporciona una lectura conjunta de los tres diagramas M, N y T.

ARCO TRIARTICULADO CON CARGA VERTICAL

Su resolución es más sencilla, pues basta considerarlo dividido en dos partes, como dos vigas con el apoyo C común en el que tenemos un empuje horizontal.

Con un polo cualquiera O' se traza un polígono funicular que nos permite la obtención de las dos líneas de cierre L_1 y L_2 . Las paralelas a dichas líneas en el polígono de fuerzas nos dan tres fuerzas P_A , P_B y P_C , correspondientes a las presiones verticales en A, B y C. Descomponiendo esta última en las direcciones AB y BC obtenemos el punto O y, por tanto, R_A y R_B .

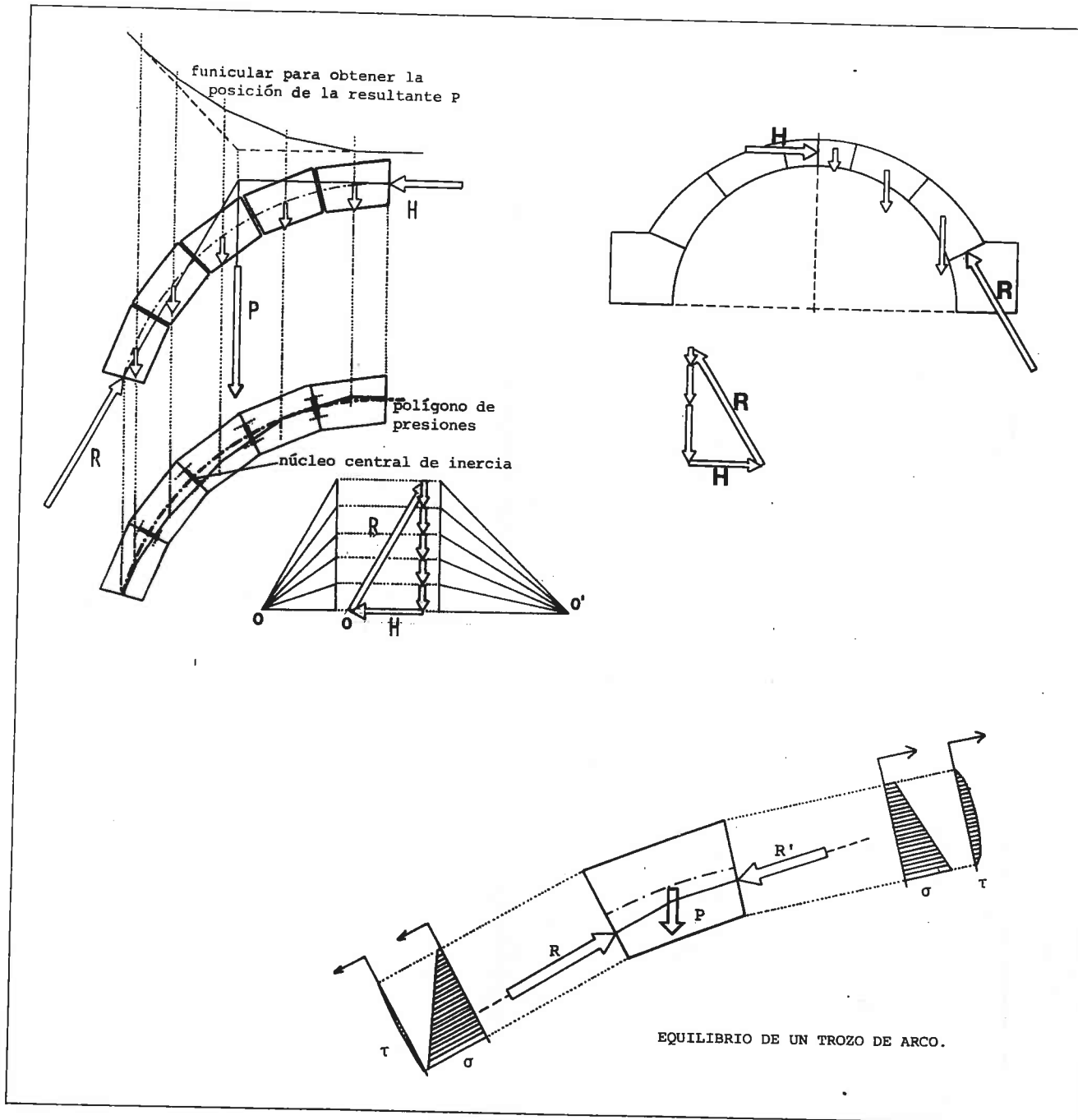
La distancia polar \bar{H} es el empuje del arco, componente horizontal de las fuerzas en las tres articulaciones. Trazando el polígono de presiones, podemos obtener el momento en cualquier punto multiplicando la ordenada z, interceptada entre el polígono y la directriz del arco, por la distancia polar \bar{H} (escala de momentos).

ARCOS Y BOVEDAS

Tanto las bóvedas clásicas como los arcos de ladrillo, piedra o cualquier otro material que resista predominantemente compresiones, pueden calcularse simplificadaamente como arcos triplemente articulados, debido a que no son materiales perfectamente elásticos y a que su proceso constructivo impide, en la mayoría de los casos, el hiperestatismo.

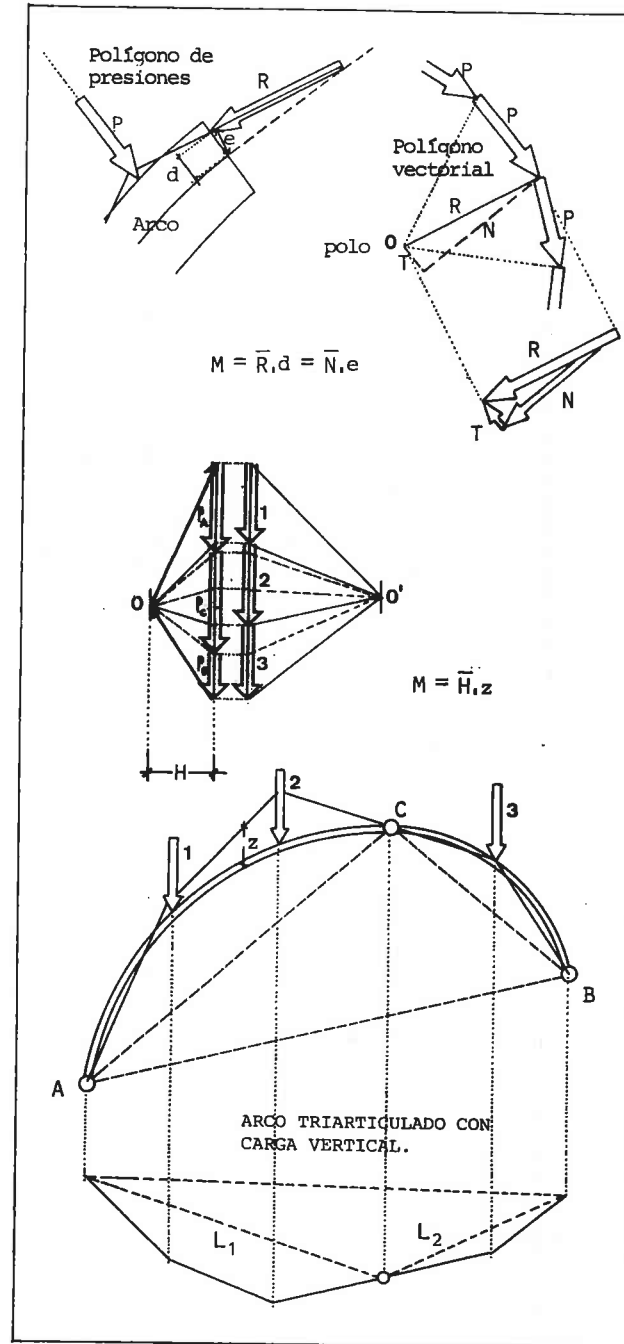
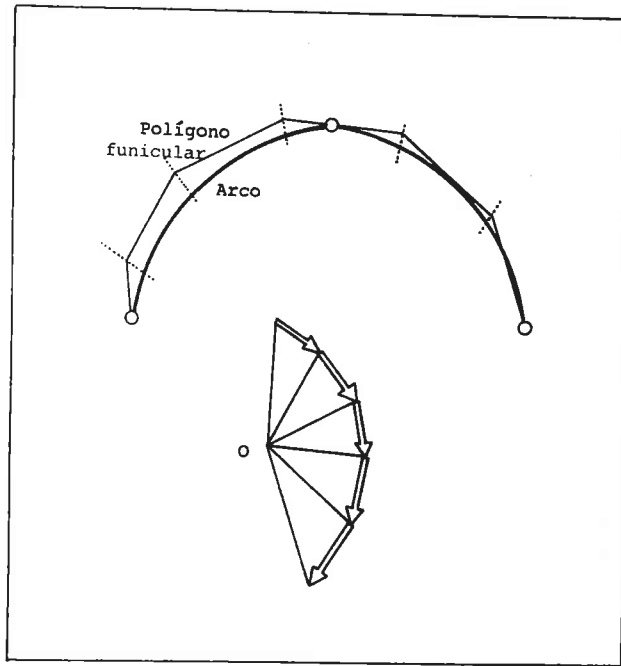
De todos modos, lo que suele interesar conocer es el posible alejamiento de la forma del arco respecto a su polígono de presiones. Por ello, se suele considerar para el cálculo dos articulaciones de arranque y una en la clave. Si el arco es simétrico, considerando una mitad, deberá estar en equilibrio la carga (o sólo su peso propio, si no tiene nada encima) con el empuje \bar{H} del arco y la reacción \bar{R} en el arranque. En general, dividiremos el arco (o la bóveda) en franjas mediante cortes (que pueden coincidir con el despiece del mismo); determinando el peso propio de cada trozo y el del relleno o carga que tenga encima, así tendremos las cargas 1, 2, 3, ...; con un polo cualquiera O' obtenemos la resultante \bar{P} y su posición, con lo que determinamos inmediatamente \bar{R} y \bar{H} para que haya equilibrio. Si no hubiera simetría, el problema sería como siempre el trazar el polígono funicular que pasa por las tres articulaciones (polígono de presiones).

Determinados \bar{R} y \bar{H} , y por tanto, O , polo del polígono de presiones, se traza éste. El polígono de presiones no debe salirse del núcleo central de la bóveda o del arco para que estén comprimidos en todos sus puntos. Por otro lado, conviene también que las componentes tangenciales sean mínimas y las normales las máximas; se podría incluso hacer una adecuada estereotomía del arco diseñando las juntas ortogonales al polígono de presiones.



POLIGONO DE PRESIONES

Para el último arco triarticulado resuelto, podemos trazar un funicular con polo O y la línea de acción de R_A (o de R_B) como primer lado. Cada uno de los sucesivos lados de este funicular es precisamente la línea de acción de la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda; la magnitud de esta resultante es justamente el radio polar correspondiente. Tal polígono recibe el nombre de *polígono de presiones*. Este polígono pasa necesariamente por B y C (una vez empezado por A), puesto que el momento en las articulaciones es nulo, por tanto, el polígono de presiones es el funicular de las cargas que pasa por las tres articulaciones. Esta misma propiedad la podíamos haber utilizado para trazarlo (problema de trazar un funicular que pase por A, B y C).



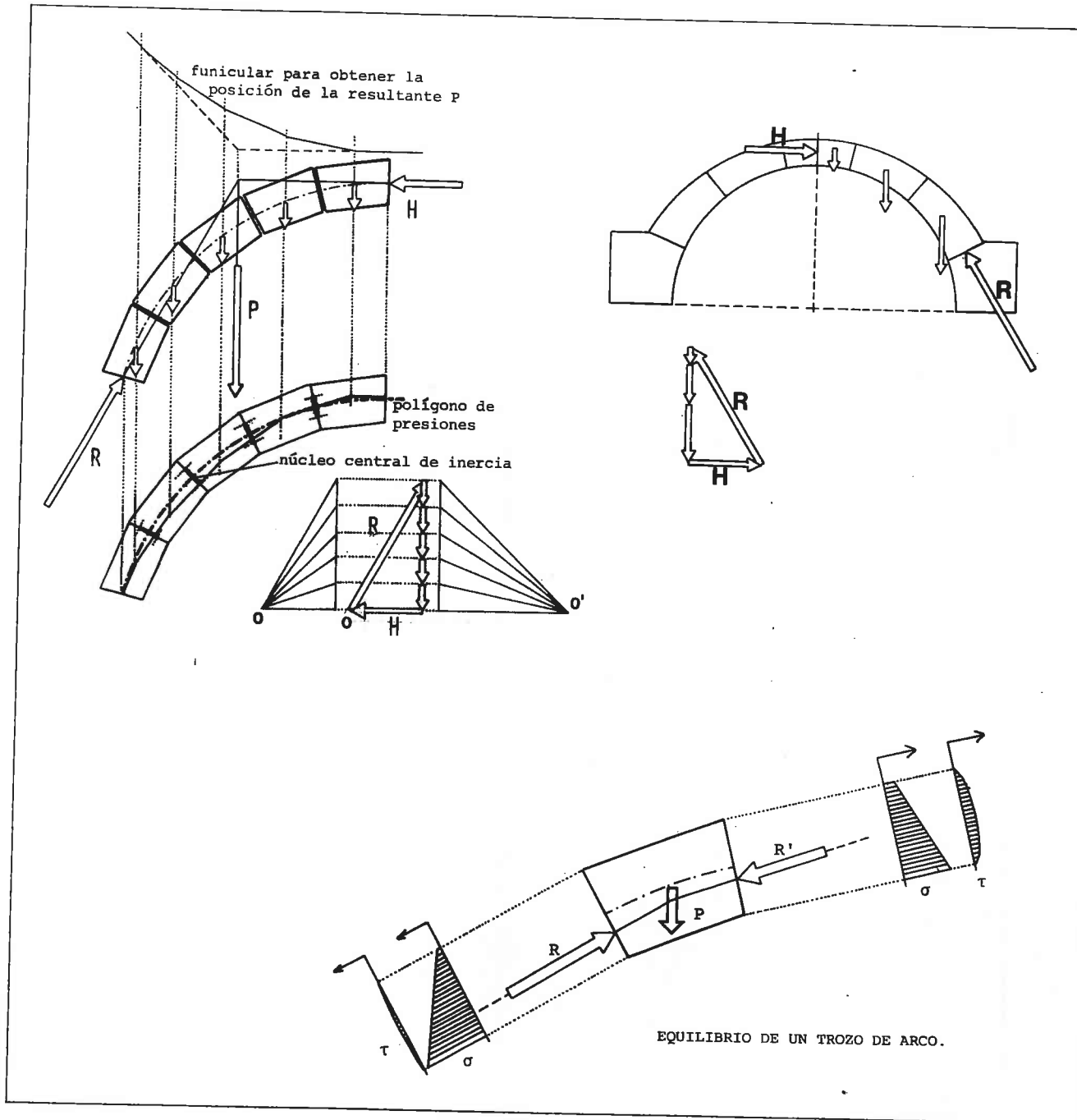
El polígono de presiones permite obtener en cualquier punto los valores M (momento flector) N (solicitación axial) y T (solicitación tangencial). El valor de M se obtiene en cualquier punto multiplicando la magnitud de la resultante (fuerza) R por la distancia d (en escala de longitudes del arco) desde el punto considerado del arco hasta la línea de acción de la resultante. Las componentes normal N y tangencial T se obtienen descomponiendo el radio polar R sobre los ejes principales (normal y transversal) de la sección del arco. También puede obtenerse M mediante el producto de N por e, distancia del punto del arco considerado al punto por donde pasa R en la misma sección (excentricidad de la resultante). Vemos que el trazado del polígono funicular de un arco nos proporciona una lectura conjunta de los tres diagramas M, N y T.

ARCO TRIARTICULADO CON CARGA VERTICAL

Su resolución es más sencilla, pues basta considerarlo dividido en dos partes, como dos vigas con el apoyo C común en el que tenemos un empuje horizontal.

Con un polo cualquiera O' se traza un polígono funicular que nos permite la obtención de las dos líneas de cierre L_1 y L_2 . Las paralelas a dichas líneas en el polígono de fuerzas nos dan tres fuerzas P_A , P_B y P_C , correspondientes a las presiones verticales en A, B y C. Descomponiendo esta última en las direcciones AB y BC obtenemos el punto O y, por tanto, R_A y R_B .

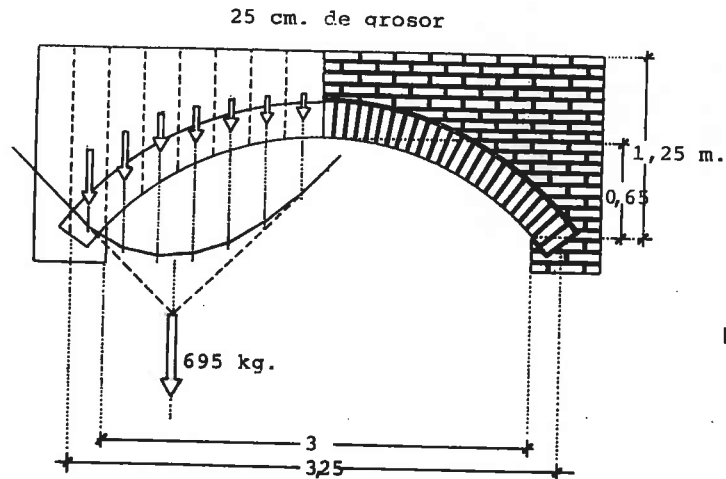
La distancia polar \bar{H} es el empuje del arco, componente horizontal de las fuerzas en las tres articulaciones. Trazando el polígono de presiones, podemos obtener el momento en cualquier punto multiplicando la ordenada z, interceptada entre el polígono y la directriz del arco, por la distancia polar \bar{H} (escala de momentos).



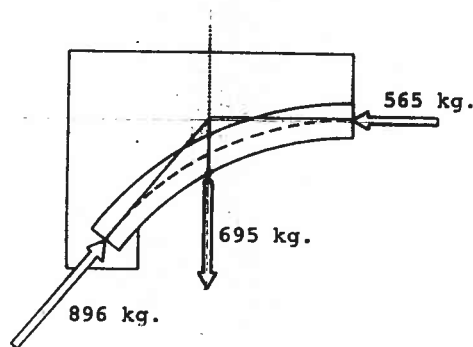
ARCOS Y BOVEDAS

Tanto las bóvedas clásicas como los arcos de ladrillo, piedra o cualquier otro material que resista predominantemente compresiones, pueden calcularse simplídicamente como arcos triplemente articulados, debido a que no son materiales perfectamente elásticos y a que su proceso constructivo impide, en la mayoría de los casos, el hiperestatismo.

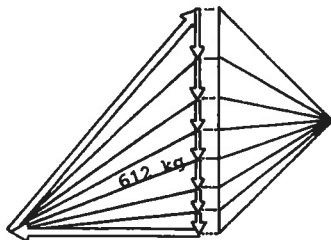
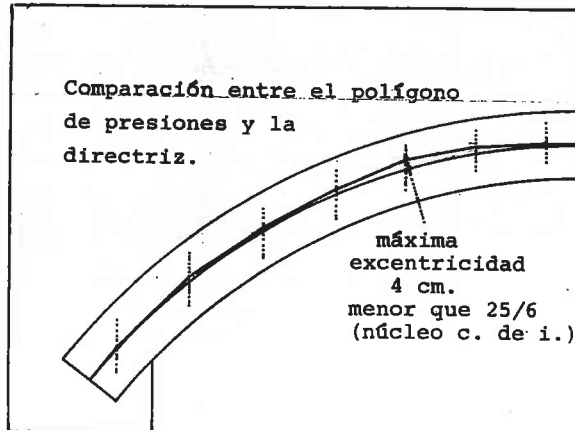
De todos modos, lo que suele interesar conocer es el posible alejamiento de la forma del arco respecto a su polígono de presiones. Por ello, se suele considerar para el cálculo dos articulaciones de arranque y una en la clave. Si el arco es simétrico, considerando una mitad, deberá estar en equilibrio la carga (o sólo su peso propio, si no tiene nada encima) con el empuje \bar{H} del arco y la reacción \bar{R} en el arranque. En general, dividiremos el arco (o la bóveda) en franjas mediante cortes (que pueden coincidir con el despiece del mismo); determinando el peso propio de cada trozo y el del relleno o carga que tenga encima, así tendremos las cargas 1, 2, 3, ...; con un polo cualquiera O' obtenemos la resultante \bar{P} y su posición, con lo que determinamos inmediatamente \bar{R} y \bar{H} para que haya equilibrio. Si no hubiera simetría, el problema sería como siempre el trazar el polígono funicular que pasa por las tres articulaciones (polígono de presiones). Determinados \bar{R} y \bar{H} , y por tanto, O , polo del polígono de presiones, se traza éste. El polígono de presiones no debe salirse del núcleo central de la bóveda o del arco para que estén comprimidos en todos sus puntos. Por otro lado, conviene también que las componentes tangenciales sean mínimas y las normales las máximas; se podría incluso hacer una adecuada estereotomía del arco diseñando las juntas ortogonales al polígono de presiones.



EJEMPLO: ARCO DE LADRILLO

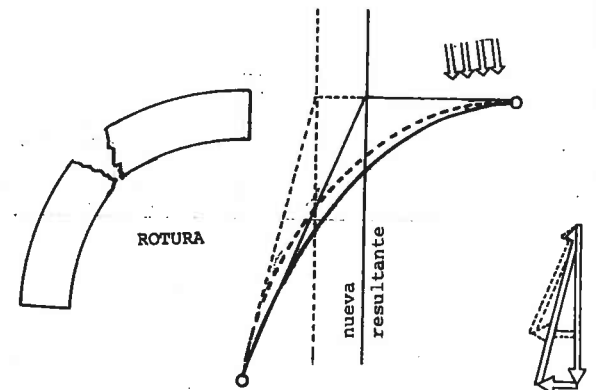
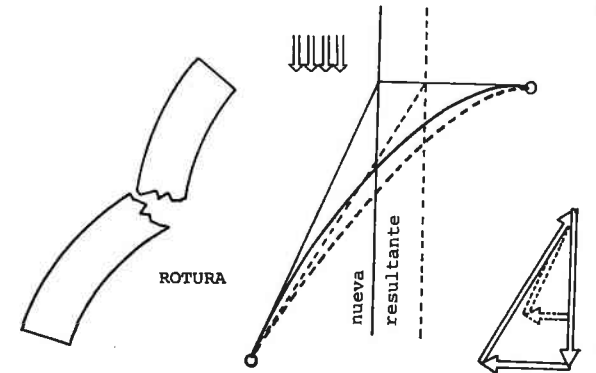


Comparación entre el polígono de presiones y la directriz.

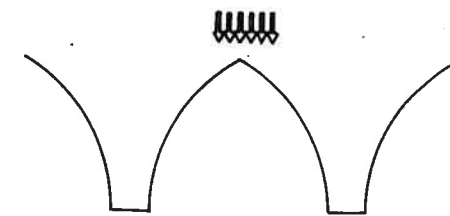


Densidad del ladrillo: 1800 kg/m³.
 Sección del arco: 25X25 = 625 cm².
 Módulo resistente: 2604 cm³.
 Tensión en el arranque: 896/625 = 1,4 kg/cm².
 Tensión en el punto de mayor excentricidad:
 $\sigma_{max} = 612/625 + 612 \times 4/2604 = 0,98 + 0,94 = 1,9 \text{ kg/cm}^2$.

CAMBIOS EN EL POLÍGONO DE PRESIONES DE UN ARCO AL AÑADIR NUEVAS CARGAS.

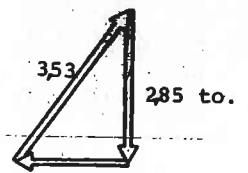
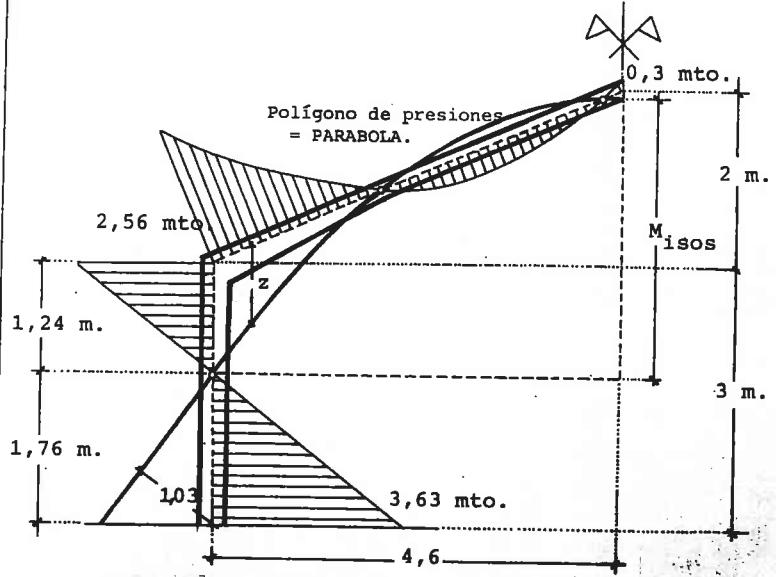


ARCO REBAJADO: Carga conveniente

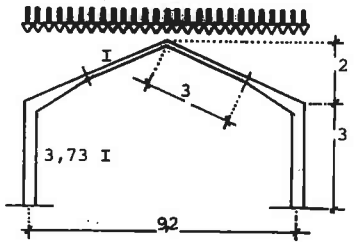


ARCO APUNTADO: Carga conveniente

EJEMPLO DE POLIGONOS DE PRESIONES EN ARCOS HIPERESTATICOS.

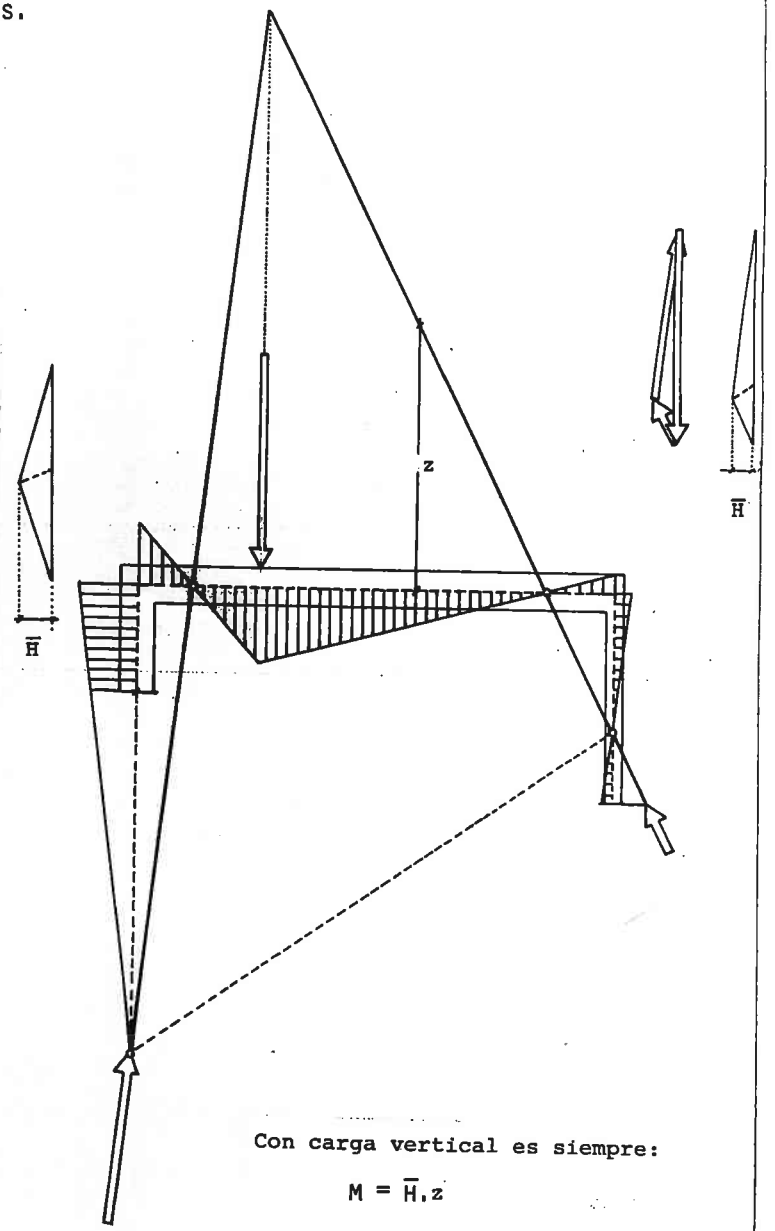
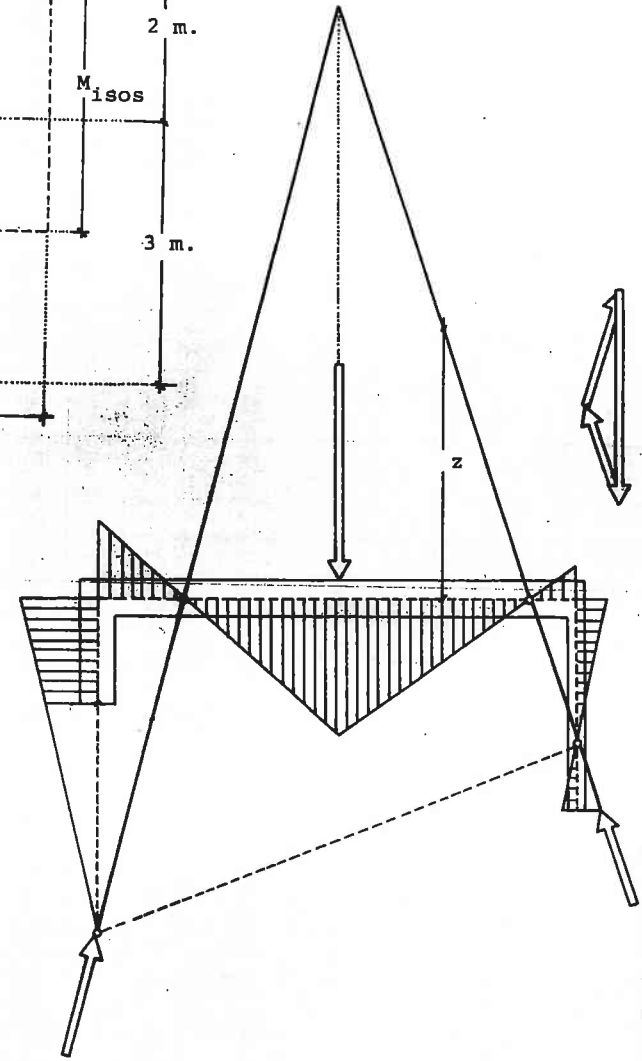


$\bar{H} = 208 \text{ to.}$
 $0,62 \text{ to/m.}$



$M_{\text{isos}} = 0,62 \times 9,2^2 / 8 = 6,56 \text{ mto.}$
 $= 3,16 \text{ m. en escala del arco; } 6,56 / 3,16 = H$

$M_{\text{arranque}} = 3,63 \text{ mto} =$
 $= 3,53 \times 1,03 =$
 $= H \times 1,76$



Con carga vertical es siempre:
 $M = \bar{H} \cdot z$